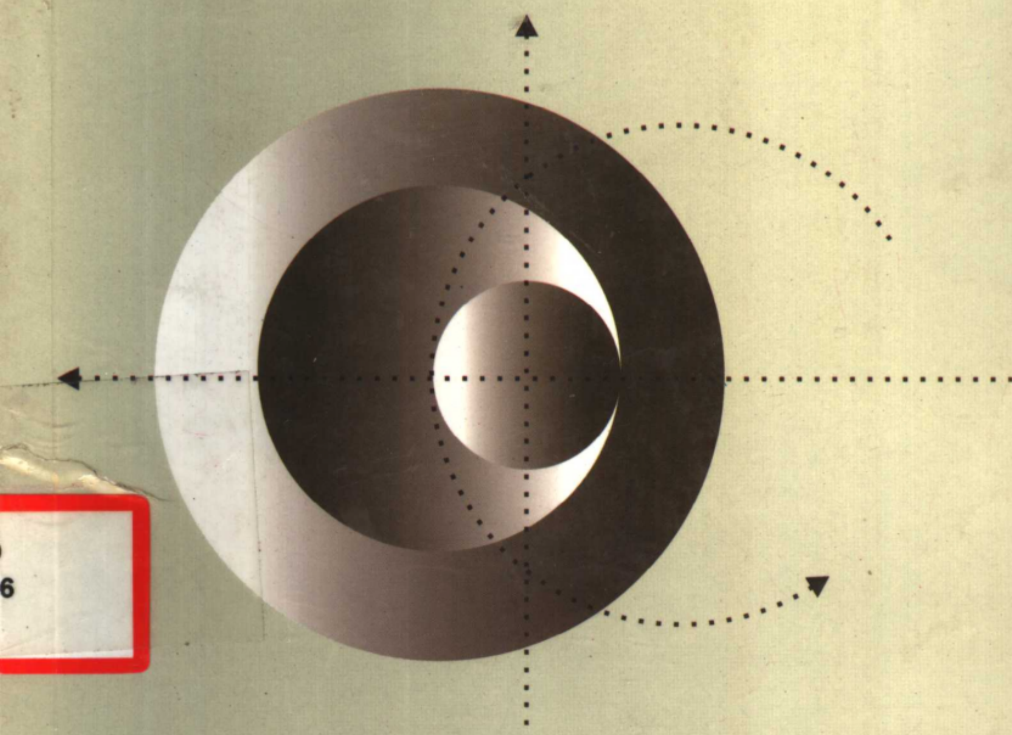
现代应用数学★

动力系统的稳定性

The Stability of Dynamical Systems

J.P.LaSalle 著



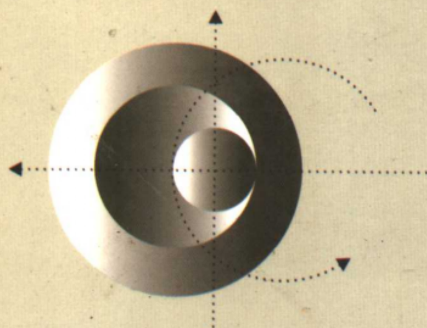
四川科学技术出版社

现代应用数学 ★

J.P.LaSalle 著

动力系统的稳定性

The Stability of Dynamical Systems





ISBN 7-5364-4842-2/O·56

定价：12.00元

J.P.LaSalle 著
陆 征 一 译

本书由美国工业与应用数学协会
Society for Industrial and Applied Mathematics 授权翻译出版

The Stability of Dynamical Systems

动力系统的稳定性

四川科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

动力系统的稳定性/陈兰荪主编．-成都:四川科学技术出版社,2002.7

(现代应用数学丛书)

ISBN 7-5364-4842-2

Ⅰ.动… Ⅱ.陈… Ⅲ.动力系统(数学)-稳定性 Ⅳ.O19

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 051425 号

著作权合同登记章

图进字 21-2002-014 号

动力系统的稳定性

原　　著　J.P.LaSalle(美)
主　　编　陈兰荪
译　　者　陆征一
责任编辑　康利华　杨晓黎
封面设计　韩健勇
版面设计　杨璐璐
责任出版　何明理
出版发行　四川科学技术出版社
　　　　　成都盐道街 3 号　邮政编码 610012
开　　本　1000mm×1400mm　1/32
　　　　　印张 3.5　字数 110 千
印　　刷　郫县犀浦印刷厂
版　　次　2002 年 7 月成都第一版
印　　次　2002 年 7 月成都第一次印刷
印　　数　1-500 册
定　　价　12.00 元
ISBN 7-5364-4842-2/O·56

《现代应用数学》

主编　陈兰荪

中国科学院数学研究所

主编的话

数学在向着“纯粹”方向发展，即在最为抽象的领域中不断得到优美的定理的同时，又不断提供给应用科学和社会科学等方面解决问题的强有力的现代工具.

将最新的抽象结果应用于具有实际意义的模型而得到具有指导性意义的结果是现代应用数学的一大特征. 十分明显的是，数学已经在生命科学、材料科学以及信息技术方面发挥着越来越重要的作用，并且在社会科学方面不断地显示出威力.

本专著的作者 J. P. LaSalle 为美国著名数学家，国际著名刊物 J. Diff. Eqns. 的创始主编. 他于 20 世纪 60 年代初根据 Liapunov 稳定性理论及 Birkhoff 极限集提出了现称为 LaSalle 不变性原理. 此原理不仅具有理论上的完美性，而且在大量稳定性问题的论证中是一个非常有效的方法，而其思想在这本专著中有充分的体现. 我们希望读者通过此书体会 LaSalle 不变性原理的思想，并从中得到帮助.

我们将不定期选择一些具有广泛应用背景的专著通过《现代应用数学》丛书陆续介绍给大家.

陈兰荪

于中关村

2001 年 10 月

译者前言

译者在 20 世纪 80 年代初进行研究生学习时接触到微分方程稳定性论证的强有力工具： LaSalle 不变性原理. 通过查阅 LaSalle 1960 年的著名原始文献，学习并将 LaSalle 原理应用于数学生物学中基本和重要的 Lotka-Volterra 系统. 对于一类微分方程和时滞方程得到了系统全局稳定的充要条件，从中体会到 LaSalle 原理确实是 Liapunov 稳定性方法与 Birkhoff 极限集完美结合的理论产物，同时也是高维以及无穷维动力系统稳定性论证的强有力工具.

最近又读到由美国工业与应用数学协会重印的 (1993 年版)LaSalle 专著《 The Stability of Dynamical Systems 》，书中 LaSalle 将其原理通过几类 (离散半动力，局部动力，局部半动力) 系统清晰地展现在我们面前.

将 LaSalle 的思想介绍给更广大的读者是翻译本书的动力，希望此书的中文版能够给读者的教学和科研提供帮助.

本书的翻译得到了罗勇，何碧以及陆云飞的帮助. 云飞帮助录入了除数学公式以外的所有内容，正是他的鼓励促使我在较短的时间内完成了译文. 罗勇，何碧分别帮助我整理了译文并校稿. 感谢他们三位在我完成本书翻译过程中所给予的鼓励和帮助.

感谢白宝刚教授在本书图形完成方面的帮助和指导.

最后，感谢陈兰荪先生将此译著列入由他主编的《现代应用数学》丛书.

陆 征 一

于温州市学院路

2001 年

前 言

某种程度上讲，西方世界确实在 20 世纪 50 年代中期重新发现了 Liapunov 直接方法. 至少在那个时候，其在非线性控制系统设计中的重要性得到了广泛的认识. 我从 1959 年开始了解并体会到 Liapunov 理论，当时 Solomon Lefschetz 和我正在写一本关于这方面的初等教材. 正是在写作过程中，我发现了 Liapunov 函数与 Birkhoff 极限集之间的简单关系. 这个简单关系的发现协调了 Liapunov 理论并且极大地推广了 Liapunov 直接方法. 在过去十多年中，此推广的方法已经不再局限于常微分方程领域，它也成为了其它领域的研究课题. 本书的主要目的就是介绍一些这方面的新进展.

第一章，我们考虑动力系统的最简单形成一由自治差分方程所决定的离散半动力系统. 在这个基本内容中给出主要的思想和一般理论的结构. 在第二章，我们介绍相关理论在自治常微分方程 (局部动力系统) 方面的进展. 第三章介绍滞后型泛函微分方程 (局部半动力系统) 的理论. 此时，状态空间为无穷维且非局部紧. 最新进展包括一大类非自治常微分方程解的极限集的不变性的发现. 这些不变性原理的讨论及其与稳定性的关系由 Zvi Artstein 写入了附录 A. 第四章为关于非自治差分方程的同样的理论，这些内容虽然是新的，但本质上更为基本.

首先，我感谢 John R. Graef 在密西西比州立大学组织了这次区域性会议. 由于他的邀请，激发了我准备这些讲稿. 这次组织得非常好的会议和热情的参与者使我感到十分愉快. 我感谢 Zvi Artstein 所做的讲座以及允许我把他的讲稿以附录的形式包含在本书中.

J. P. LaSalle

Little Compton, Rhode Island

January 1976

目　　录

第一章

差分方程•离散半动力系统

1. 引言

现在，对于差分方程进行系统性研究已经越来越必要，其本身具有相当重要的数学背景. 除了收敛性和连续性之外，解的存在性及定义域方面不存在困扰人的问题. 其研究又为微分方程、微分差分方程以及泛函微分方程稳定性的研究提供了一个良好的开端. 本章我们将会看到关于差分方程一般理论的基本描述和一些新的结果. 文献 [49] 是一本非常好的书，它主要是关于差分方程经典 Liapunov 稳定性理论及其在控制系统设计和分析方面的应用（还有文献 [81], [82], [32]). 在文献 [46] 中， Hurt 拓广了经典理论并将其应用于数值分析. 我们将推广 Hurt 的结果. 在第四章中，我们考虑非自治差分方程.

1.0. 记号

J 为正整数集.

J_+ 为非负整数集.

R^m 为 m 维欧氏空间， $\|x\|$ 为欧氏范数.

用 x 表示向量或函数. 记 $x: J_+ \to R^m$, 则 x' 和 $\dot{x}$ (由 J_+ 到 R^m 的函数) 定义为

$$x'(n) = x(n+1),$$

$$\dot{x} = x' - x,$$

$$T: R^m \to R^m.$$

以差分方程

$$x' = Tx \tag{1.1}$$

代替

$$x(n+1) = T(x(n)), n \in J_+. \tag{1.2}$$

初值问题

$$x' = Tx, \quad x(0) = x^0 \tag{1.3}$$

的解为 $x(n) = T^n(x^0)$, 其中 T^n 为 $T : T^{n+1} = T(T^n)$ 的第 n 次迭代, $T^0 = I$ 为恒等映射. 函数的乘法表示复合. 方程 (1.2) 可视为通过一种算法定义一个函数 x.

1.1. 练习 证明: m 阶差分方程 ($g : R^m \to R$)

$$u(n+1) = g(u(n), u(n-1), ..., u(n-m+1)), \tag{1.4}$$

等价于一阶差分方程 (1.2) 构成的系统.

2. R^m 上的离散动力系统

以下假设 T 为连续的.

2.1. 定义 R^m 上的离散动力系统为一映射 $\pi : J_+ \times R^m \to R^m$, 对 $n, k \in J_+$ 和 $x \in R^m$, 满足:

(i) $\pi(0, x) = x$,

(ii) $\pi(n, \pi(k, x)) = \pi(n+k, x)$,

(iii) π连续.

每一个差分方程 (1.1) 定义了一个动力系统 $\pi : \pi(n, x^0) = T^n x^0$, 相反, 每一个离散动力系统对应于一个差分方程 $x' = Tx$, 其中 $T(x) = \pi(1, x)$. 由

于此原因，我们以下着重考虑差分方程 (1.1). 始于 x 点的运动 $T^n x$ 表示状态序列 $x, Tx, \cdots, T^n x, \cdots$. 条件 (ii) 为半群性质且表示正时间轨道的唯一性. π 称为“半流”或“半动力”系统. 将 J_+ 换成 J 后， π 称为动力系统 (此时， T 可逆).

3. 运动的极限集

我们感兴趣的是当 n 取大值时， $T^n x$ 的变化. 这种关于 $T^n x$ 的渐近性态正是稳定性理论所关心的. 进一步，稳定性还必须涉及动力学行为： x 和 T 在扰动下，运动变化如何？ Liapunov 稳定性定义只涉及 x 的扰动. 在第 11 节中，我们将考虑关于 T 的扰动.

$x = Tx$ 之解的逐次逼近方法主要基于：如果 $T^n x^0$ 收敛，其极限必为一解 (不动点或不变点). 我们现在要推广这个事实. 根据 Birkhoff[15] 的理论，我们引入 $T^n x$ 的极限集的概念. (我们仅对正 n 感兴趣，以后都省略“正”字.) 下一节我们要证明，对于有界的 $T^n x$, $\Omega(x)$ 为不变的 $(T(\Omega(x)) = \Omega(x))$. 第六节及以后，我们将说明如何利用 Liapunov 函数得到运动极限集的结构.

3.0. 记号

对于 $x \in R^m$ 和 R^m 中的任意集合 S

$$\rho(x, S) = \inf\{\|y - x\|; y \in S\}, \tag{3.1}$$

为 x 到 S 的距离;

$T^n x \to S (n \to \infty)$ 表示 $(T^n x, S) \to 0 \quad (n \to \infty)$;

$\bar{S} = \{x;\ (x, S) = 0\}$ 为 S 的闭包;

集合 S 称为是闭的，如果 $\bar{S} = S$; 称为是开的，如果其补集是闭.

$T(S) = \{T(x); x \in S\}$.

3.1. 定义 (Birkhoff) y 称为 $T^n x$ 的极限点，如果存在整数列 n_i，当 $i \to \infty$ 时，有 $T^{n_i} x \to y$ 及 $n_i \to \infty$. 始于 x 的运动 $T^n x$ 的极限集 $\Omega(x)$ 为所有 $T^n x$ 的极限点的集合.

3.2. 练习 $\Omega(x)$ 的一个等价定义是

$$\Omega(x) = \bigcap_{j=0}^{\infty} \overline{\bigcup_{n=j}^{\infty} T^n x}. \tag{3.2}$$

3.3. 练习 对任意 $H \subset R^m$，定义

$$\Omega(H) = \bigcap_{j=0}^{\infty} \overline{\bigcup_{n=j}^{\infty} T^n(H)}. \tag{3.3}$$

证明: $y \in \Omega(H)$ 当且仅当存在序列 $n_j \in J_+$ 及 $y_j \in H$，当 $j \to \infty$ 时，有 $T^{n_j} y_j \to y$ 及 $n_j \to \infty$.

4. 不变性

4.1. 定义 对于 (1.1) 或 T，集合 H 称为是正 (负) 不变的，如果 $T(H) \subset H$ ($H \subset T(H)$). H 称为是不变的，如果 $T(H) = H$.

我们马上要证明，有界运动的极限集是闭和不变的. 与连续运动不同，极限集不必连通. 然而，相对于不变性，它具有连通性.

4.2. 定义 一个闭不变集 H 称为是不变连通的，如果它不是两个非空不相交闭不变集之合.

4.3. 定义 运动 $T^n x$ 称为是周期的 (循环的)，如果对某个 $k > 0, T^k x = x$. 其中最小的 k 称为运动的周期或循环的阶. 如果 $k = 1$，x 为 T 的不动点，则 x 称为 (1.1) 的平衡状态.

4.4. 练习　证明：具有有限元素的不变集为不连通的当且仅当其为周期运动.

4.5. 练习　证明：

(a) 正不变集的闭包为正不变.

(b) 有界不变集的闭包是不变的.

4.6. 练习　举例说明不变集的闭包不是不变的.

4.7. 练习　$T^n x$ (关于所有 $n \in J$ 定义) 称为运动 $T^n x$ 的扩张，如果对所有的 $n \in J$ 有，$T_0 x = x$ 并且 $T(T_n x) = T_{n+1} x$.

注.　$T_n x = T^n x$ 对 $n \in J_+$ 成立. 假如 x 属于不变集 H, 则运动 $T^n x$ 总可以扩张，但扩张可能不唯一.

4.8. 练习　集合 H 不变当且仅当每一个始于 H 的运动都有属于 H 的一个扩张.

4.9. 练习　举例说明：不变集 H 可以有不属于 H 的扩张.

4.10. 练习　给定 R^m 中集合 E, M 为 E 中最大不变集.

证明：

(a) M 为所有扩张后仍属于 E (对所有 $n \in J$) 的运动之合;

(b) $x \in M$ 当且仅当存在扩张运动 T_n 使 $T_n x \in E$ $(n \in J)$;

(c) E 紧，则 M 紧.

5. 极限集的基本性质

下一节中，我们将利用极限集的基本性质推广和统一处理 Liapunov 直接方法.

5.1. 定理　极限集 $\Omega(x)$ 为闭和正不变的.

证明: 因为 $\Omega(x)$ 的补集是开的，所以 $\Omega(x)$ 是闭的. 设 $y \in \Omega(x)$, 则存在整数列 n_i, 当 $i \to \infty$ 时, $n_i \to \infty$ 且 $T^{n_i}x \to y$. 由 T 的连续性有, $T(T^{n_i}x) = T^{n_i+1}x \to Ty$ 且 $Ty \in \Omega(x)$. 从而 $T(\Omega(x)) \subset \Omega(x)$, 即 $\Omega(x)$ 为正不变的.

我们最感兴趣的是有界运动的渐近性态. 如果运动 $T^n x$ 对所有 $n \in J_+$ 有界，则称为 (Lagrange 意义下) 是正向稳定的.

5.2. 定理 如果 $T^n x$ 对 $n \in J_+$ 有界，则 $\Omega(x)$ 非空、紧、不变、不变连通并且为 $T^n x$ $(n \to \infty)$ 趋于的最小闭集.

证明: $T^n x$ 的有界性蕴含了 $\Omega(x)$ 非空，有界，从而由定理 5.1, $\Omega(x)$ 紧. 设 $y \in \Omega(x)$, 如定理 5.1 的证明取 n_i. 由 $T^n x$ 的有界性，可设 $T^{n_i}x$ 收敛 (否则，可选取子序列). 设 $T^{n_i-1} \to z$, 则 $z \in \Omega(x)$, $T(T^{n_i-1}x) = T^{n_i}x \to Tz = y$. 因此, $\Omega(x) \subset T(\Omega(x))$, 再由定理 5.1, 可得 $\Omega(x)$ 不变.

以下证明 $T^n x$ 有界时, $T^n x \to \Omega(x)$. 因为 $(T^n x, \Omega(x))$ 有界, 如果 $T^n x$ 不趋于 $\Omega(x)$, 则存在 $n_i \to \infty$ 使得 $T^{n_i}x$ 收敛，而 $(T^{n_i}x, \Omega(x))$ (当 $i \to \infty$ 时) 不趋于 0. 显然矛盾，因为 $T^{n_i}x$ 的极限属于 $\Omega(x)$, 所以，当 $n \to \Omega$ 时, $T^n x \to \Omega(x)$. 设当 $n \to \infty$ 时, $T^n x \to E$ 且 E 闭，则 $\Omega(x) \subset E$. 所以 $\Omega(x)$ 为 $T^n x$ $(n \to \infty)$ 趋于的最小闭集.

$\Omega(x)$ 的不变连通性. 假设 $\Omega(x)$ 为两个不相交的非空闭不变集合 Ω_1 和 Ω_2 之和. 因此，存在不相交开集 U_1 和 U_2 使得 $\Omega_1 \subset U_1$ 及 $\Omega_2 \subset U_2$, 因为 T 在 Ω_1 上连续，所以一致连续，即存在开集 V_1 使得 $\Omega_1 \subset V_1$ 并且 $T(V_1) \subset U_1$. 因为 $\Omega(x)$ 是 $T^n x$ 趋于的最小闭集, $T^n x$ 必定同时与 V_1 和 U_2 相交无穷多次. 而这蕴含着存在子列 $T^{n_i}x$ 既不属于 V_1 也不属于 U_2, 这与 $\Omega(x)$ 含在 V_1 与 U_2 之合中相矛盾. 故 $\Omega(x)$ 不变连通.

5.3. 练习 举例说明，极限集 $\Omega(x)$ 非空，而 $T^n x$ 当 $n \to \infty$ 时不趋于 $\Omega(x)$.

5.4. 练习 如果定义 2.1 中 J_+ 换为 J, 则以上结论如何?

5.5. 练习　(参考练习 3.3) 给出 $\Omega(H)$ 相应的基本性质.

5.6. 练习　证明：　如果 K 为紧，正不变，则 $\Omega(K)=\cap_{n=0}^{\infty}T^n(K)$ 非空，紧，不变，且为 K 中的最大不变集.　(此为练习 5.5 之特例)

6. Liapunov 函数

推广的 Liapunov 直接方法. 运动极限集的结构决定其渐近性态. 例如，一个运动趋于一个有限集合，则由定理 5.2 和练习 4.4 可知，此运动趋于一个周期运动. 现在我们要说明，适当的 Liapunov 函数可以给出极限集的结构. 这主要是利用极限集的不变性特征，此方法又称为"不变性原理". 此原理包含基本和简单的思想，而在理论和运用中又极为有效，并且可以有进一步的推广 (第三章以及附录 A).

设 $V: R^m \to R$. 关于 (1.1)(或 T) 定义

$$\dot{V}(x)=V(Tx)-V(x). \tag{6.1}$$

如果 $x(n)$ 为 (1.1) 的解,

$$\dot{V}(x(n))=V(x(n+1))-V(x(n)).$$

以及 $\dot{V}(x)\leq 0$ 表示沿解 V 单调不增. 计算 $\dot{V}(x)$ 不需要知道解的具体表达式，它利用 (1.1) 的右端直接计算，故此方法称为是"直接的".

6.1. 定义　集合 G 属于 R^m. V 称为是 G 上关于 (1.1) 的 Liapunov 函数，如果 (i) V 连续，　(ii) $\dot{V}(x)\leq 0$ 对所有 $x\in G$ 成立.

注：　定义中的 (ii) 可换为 $\dot{V}$ 在 G 上不改变符号.

6.2. 记号　关于 G 上 (1.1) 的 Liapunov 函数 V, 定义

$$E=\{x;\dot{V}(x)=0,x\in \bar{G}\}. \tag{6.2}$$

以 M 表 E 中的最大不变集，而 $V^{-1}(c)=\{x;V(x)=c,x\in R^m\}$.

6.3. 定理 (不变性原理) 假如 (i) V 为 G 上 (1.1) 的 Liapunov 函数，(ii) $x(n)$ 为 (1.1) 的有界解且对所有 $n\geq 0$ 属于 G, 则存在 c, 当 $n\to\infty$ 时有 $x(n)\to M\cap V^{-1}(c)$.

证明: 记 $x^0=x(0)$, 则 $x(n)=T^n x^0$. 由定理的假设可知，$V(x(n))$ 关于 n 单调不增且下有界，故当 $n\to\infty$ 时，$V(x(n))\to c$. 取 $y\in\Omega(x^0)$, 则存在序列 n_i 使得 $n_i\to\infty$ 且 $x(n_i)\to y$. 因为 V 连续，$V(x(n_i))\to V(y)=c$, 故 $\Omega(x^0)\subset V^{-1}(c)$. 又因为 $\Omega(x^0)$ 不变，$V(Ty)=c$ 且 $\dot V(y)=0$. 因此 $\Omega(x^0)\subset E$, 即 $\Omega(x^0)\subset M$. 由 $x(n)\to\Omega(x^0)$ 可知 $x(n)\to M\cap V^{-1}(c)$.

先考查一个简单例子以说明如何应用以上定理. 然后给出一些特殊情况下的推论.

6.4. 例 考虑二维系统

$$x(n+1)=\frac{ay(n)}{1+x^2(n)},$$

$$y(n+1)=\frac{bx(n)}{1+y^2(n)}$$

或写成

$$x'=\frac{ay}{1+x^2},y'=\frac{bx}{1+y^2}. \tag{6.3}$$

取 $V(x,y)=x^2+y^2$, 则

$$\dot V(x,y)=(\frac{b^2}{(1+y^2)^2}-1)x^2+(\frac{a^2}{(1+x^2)^2}-1)y^2.$$

情形 1. $a^2<1,b^2<1$, 则

$$\dot V\leq(b^2-1)x^2+(a^2-1)y^2,$$

即 V 为 (6.3) 在 R^2 上的 Liapunov 函数. 此时 $M=E=\{(0,0)\}$. 因为每一个解均有界，由定理 6.3, 当 $n\to\infty$ 时，每个解趋于原点 (原点为整体吸引

子，以后我们知道，此时原点还是整体渐近稳定的). 此即 Liapunov 的经典情形，$V(x)$ 及 $-\dot{V}(x)$ 均为正定.

情形 2. $a^2 \le 1, b^2 \le 1$ 且 $a^2 + b^2 < 2$. 不妨设 $a^2 < 1$ 而 $b^2 = 1$. V 仍然是 (6.3) 在 R^2 上的 Liapunov 函数，但 $-\dot{V}$ 不再是正定的. 事实上，由 $\dot{V} \le (a^2 - 1)y^2$ 可知，E 为 x 轴 $(y = 0)$. 而由 $T(x, 0) = (0, bx)$ 可知 $M = \{(0, 0)\}$, 故原点整体渐近稳定.

情形 3. $a^2 = b^2 = 1$. V 仍然是 (6.3) 的 Liapunov 函数并且所有解有界. 此时 $E = M$ 为两坐标轴之合，而由定理 6.3, 每一解趋于 $\{(c, 0), (0, c), (-c, 0), (0, -c)\}$ 即 E 与圆之交. 考虑两种情形.

(i) $ab = 1$. 则 $T(c, 0) = (0, bc)$, $T^2(c, 0) = T(abc, 0) = (c, 0)$. 因为极限集是不变连通的，每个解趋于一个周期运动，即原点或某一个以 2 为周期的周期运动 (参看练习 4.4).

(ii) $ab = -1$. 则有 $T(c, 0) = (0, bc)$, $T^2(c, 0) = (abc, 0) = (-c, 0)$, $T^3(c, 0) = (0, -bc)$, 而 $T^4(c, 0) = (-abc, 0) = (c, 0)$. 如果 $c \ne 0$, 这些周期运动的周期为 4. 与 (i) 类似，每个解趋于原点或某一个以 4 为周期的周期运动.

情形 4. $a^2 > 1, b^2 > 1$. 记 $S_\delta = \{(x, y); x^2 + y^2 < \delta^2\}$. 当 $x \in B_\delta$, 而 δ 充分小时，

$$\dot{V} \ge (\frac{b^2}{1+\delta^2} - 1)x^2 + (\frac{a^2}{1+\delta^2} - 1)y^2 \ge 0,$$

则 $-V$ 为 B_δ (δ 充分小) 上 (4.2) 的 Liapunov 函数，此时 $E = M = \{(0, 0)\}$. 除原点外，B_δ 中的解都不趋于原点 (解与原点的距离递增) 且 $T(x, y) = (0, 0)$ 蕴含 $x = y = 0$. 这样，根据定理 6.3, 每一解 (B_δ 中) 一定离开 B_δ(不稳定性). 而由于除平凡解 (原点) 外，其它解不能在有限时间内到达原点，所以当 $n \to \infty$ 时，非平凡解均不趋于原点.

7. 稳定与不稳定性

我们关于基本差分方程 (1.1) 或 T 定义集合的稳定和不稳定性.

7.1. 定义 集合 H 称为是稳定的，如果给定 H 的邻域 U (包含 $\bar{H}$ 的开集)，存在 H 的邻域 W，使得 $T^n(W) \subset U$ 对所有 $n \in J_+$ 成立.

下面的练习表明，我们可以限制 H 为闭正不变集.

7.2. 练习 证明： 如果 H 稳定，则 $\bar{H}$ 正不变. 特别，如果一个点稳定，则为平衡点.

7.3. 记号 关于 R^m 中集合 H 定义 $\hat{H}$ 如下： $z \in \hat{H}$，如果存在序列 $x_i \in R^m$ 和 $n_i \in J_+$ 使得 $x_i \to y \in \bar{H}$ 以及 $T^{n_i}x_i \to z$.

在拓扑动力学中， $\hat{H}$ 称为 H 的延拓. 当 $n_i \to \infty (i \to \infty)$ 时，所有满足如上关系的 z 所构成的集合称为 H 的延拓极限集，注意： $H \subset \hat{H}$. $\hat{H}$ 的性质由如下的引理给出.

7.4. 引理

(i) 设 H 为紧正不变，则 H 稳定当且仅当 $\hat{H} = H$.

(ii) 设 H 为包含在开有界正不变集 G 中的闭不变集，则 $\hat{H}$ 不变.

证明：

(i) 显然，如果存在 $z \in \hat{H}$ 但不属于 H，则 H 必不稳定. 反之，假设 H 不稳定，则存在 H 的邻域 U(不妨设其有界)，及序列 $x^i \in U$ 使得，当 $i \to \infty$ 时， $x^i \to y \in H$ 并且每一个运动 $T^n x^i$ 最终离开 U. 记 n_i 为具有性质： $T^{n_i}x^i$ 不属于 $\bar{U}$ 的最小整数. 则， $T^{n_i}x^i \in T(\bar{U})$，且此序列有界. 因为此序列包含一个极限不属于 H 的收敛子列，所以 H 不稳定蕴含了 $\hat{H} \neq H$.

(ii) 设 $z \in \hat{H}$，则存在序列 $x_i \in G$ 及 $n_i \in J_+$，当 $i \to \infty$ 时， $x_i \to y \in H$ 而 $T^{n_i}x_i \to z$. 因为 $T^{n_i+1}x_i \to Tz$，所以 $Tz \in \hat{H}$ 且 $T(\hat{H}) \in \hat{H}$. 如果 n_i 有界，则存在 $k \in J_+$ 满足 $T^k x_i \to z$. 因为 H 不变，所以 $z = T^k y \in H$，进一步存在 $w \in H \subset \hat{H}$ 使得 $Tw = z$. 如果 n_i 无界，设 $i \to \infty$ 时， $n_i \to \infty$. 这样， $T^{n_i-1}x_i$ 属于 G，因此有界. 不妨设 $T^{n_i-1}x_i \to w$. 那么 $w \in \hat{H}$，我们又得到：存在 $w \in \hat{H}$ 使得 $Tw = z$，这就证明了 $\hat{H} \subset T(\hat{H})$，且 $\hat{H}$ 不变.

应用中最重要的稳定类型是"渐近稳定". 我们将在 11 节中论及.

7.5. 定义　集合 H 称为吸引子，如果存在 $\bar{H}$ 的邻域 U 使得 $x \in U$，且 $n \to \infty$ 时，$T^n x \to \bar{H}$. H 称为是渐近稳定的，如果 H 既是稳定的，又是吸引子. 如果对所有 $x \in R^m$, 当 $n \to \infty$ 时，$T^n x \to \bar{H}$, H 称为是整体渐近稳定的. 如果 H 不是稳定的，则称为是不稳定的. 如果 H 既不是稳定的又不是吸引子，则 H 称为是强不稳定的.

7.6. 练习　集合 H 的逆象为 $T^{-1}(H) = \{z; T(z) \in H\}$. 集合 H 称为逆不变，如果 $T^{-1}(H) = H$.

证明：

(a) H 逆不变当且仅当 H 正不变且 $T^{-1}(H) \subset H$.

(b) H 负不变当且仅当 $T^{-1}x$ 关于每个 $x \in H$ 与 H 相交.

7.7. 练习　集合 H 的吸引区域 $\mathcal{R}(H)$ 为满足 $T^n x \to H$ $(n \to \infty)$ 的所有 x 构成. 记 H 的边界为 ∂H, H 的补集为 φH. 证明：如果 H 渐近稳定，则：

(a)$\mathcal{R}(H)$ 为开.

(b) $\mathcal{R}(H)$, $\partial\mathcal{R}(H)$ 和 $\varphi\mathcal{R}(H)$ 均为逆不变.

7.8. 练习　给出渐近稳定的集合 H, 使得 $\mathcal{R}(H)$, $\partial\mathcal{R}(H)$ 和 $\varphi\mathcal{R}(H)$ 均不为不变.

7.9. 定理　设 G 为有界开正不变集. 如果 (i) V 为 G 上 (1.1) 的 Liapunov 函数，(ii) $M \subset G$, 则 M 为吸引子且 $\bar{G} \subset \mathcal{R}(M)$. 如果进一步有 (iii) V 在 M 上为常数，则 M 渐近稳定 (相对于 G 整体渐近稳定).

证明：　因为 V 和 T 均为连续的，所以 $\dot{V}$ 连续而 E 闭. M 为 E 中最大不变集, 因此为闭 (练习 4.5(b)). 从而由定理 6.3 可推得 M 为吸引子. $\dot{V}$ 的连续性保证了 V 为 $\bar{G}$ 上的 Liapunov 函数. 由练习 4.5(a), $\bar{G}$ 为正不变的，而由定理 6.3., $\bar{G} \subset \mathcal{R}(M)$. 注意 $\hat{M} \subset \bar{G}$. 我们现在证明 $V(x) = c$ 时,

M 为稳定的. 如果我们可以证明 $\hat{M} \subset E$, 因为 $\hat{M}$ 不变 (练习 7.4), 而 M 为 E 中最大不变集，所以有 $\hat{M} = M$, 且 M 稳定. 设 $z \in \hat{M}$, 则 $T^n z \to M$ 且 $V(z) \geq$. 又存在 x_i 及 n_i 使得当 $i \to \infty$ 时， $x_i \to y \in M$, 以及 $T^{n_i} x_i \to z$. 由于 $V(x_i) \geq V(T^{n_i} x_i)$, 所以 $c \geq V(z)$, 且 $V(z) = c$ 对每个 $z \in \hat{M}$ 成立. 由此得 $\hat{M}$ 为不变的，故 $\hat{M} \in E$.

当 M 为单点集，或为具有有限个元素的不变连通集时，定理 7.9 的条件 (iii) 自然满足. 这样我们就得到了渐近稳定的充分条件而没有假设 V 或 $-\dot{V}$ 在 M 上正定. 这说明了为什么可以在例 6.4 中得到渐近稳定性. 这个结果也显示了我们所得到的渐近稳定的“程度”，因为知道了渐近稳定的区域比 $\bar{G}$ 更大. 在很多应用中， M 也为 E 中的最大正不变集，从而 $V(x) - c$ 在 M 上正定. 通常，一个“好”的 Liapunov 函数应该是正定的，但以上结果表明正定性并不是必须的. 不了解这一点，可能实际上已经付出了很多不必要的努力. 即使 M 为单点集，正定的 Liapunov 函数也是很难构造的. 实际上，我们可以把定理 7.9 和练习 7.10 看成是关于正定性的一个充分条件.

7.10. 练习 证明： 如果定理 7.9 的 (i), (ii) 和 (iii) 成立且 M 为 E 中的最大不变集，则当 $x \in G - M$ 时， $V(x) > c$, 其中 c 为 V 在 M 上的值，即 $V(x) - c$ 关于 M 正定.

7.11. 练习 (Liapunov **稳定与渐近稳定定理**) H 紧而 G 为包含 H 的开集.

证明：

(i) $V(x) \leq 0, x \in H$ 且 $V(x) > 0, x \in G - H$,

(ii) V 为 (1.1) 在 G 上的 Liapunov 函数,

则 H 稳定. 如果，进一步

(iii) $E \subset H$,

则 H 渐近稳定.

7.12. 注　条件 (i) 说明 V 关于 H 正定，而条件 (ii) 和 (iii) 表示 $\dot{V}$ 关于 H 负定．我们知道条件 (iii) 可由 $M \subset H$ 替代．同样，如果 V 在 M 上为常数，则没有必要假设 V 为正定的．

7.13. 例　利用上面的结果可以证明，例 6.4 中，当 $a^2 \le 1, b^2 \le 1$ 且 $a^2 + b^2 < 2$ 时，原点全局渐近稳定．注意，此时 $-\dot{V}$ 非负定．

7.14. 练习　证明：　如果没有属于 $G - M$ 的解在有限时间到达 M(M 相对 G 为逆不变), 则定理 7.9 的条件 (iii) 可以换为：　(iii)'　V 在 M 的边界上为常数．

我们现在给出差分方程对应于常微分方程不稳定性的推广的 *Cetaev* 定理．*Cetaev* 试图对于守恒动力系统证明：如果平衡点不是势能的最小点，则必不稳定 ([62,p56])．

7.15. 定理 (不稳定性定理)　设 y 为开集 U 边界的平衡点，N 为 y 的邻域．假设：(i) V 为 (1.1) 在 $G = U \bigcap N$ 上的 Liapunov 函数，(ii) $M \bigcap G$ 为空集，(iii) $V(x) = c$ 在边界 U 位于 N 内部成立，(*iv*) $V(x) < c$ 对 $x \in G$ 成立．如果 $T(G) \in U$, 则 y 不稳定．实际上，如果 N_0 是 y 的完全包含在 N 中的有界邻域，则每一个从 $G_0 = U \bigcap N_0$ 出发的解最终都要离开 N_0. 如果 U 正不变，则 y 强不稳定．实际上，初值在 U 中的解当 $n \to \infty$ 时均不趋于 y.

证明：　由定理 6.3, 任何出发于 G_0 的解最终一定离开 G_0, 因为它不趋于 N 内部的 U 的边界部分．由于解第一次离开 G_0 时仍属于 U, 它必然离开 N_0. y 在 G_0 的边界上，故 y 不稳定．如果 U 正不变，则显然 y 不为吸引子．

以下的推论，对应于 Liapunov 的前两个不稳定性定理．

7.16. 推论　设 $V : R^m \to R$ 连续且 $T(0) = 0$. 任意接近原点都存在 x

使 $V(x)>0$ 而 $V(0)=0$. 在原点的邻域 N 关于 (1.1) 有

$$\dot{V}(x)=\beta V(x)+W(x),$$

其中或者 (i) $W(x)$ 非负而 $\beta>0$ 或者 (ii) $\beta\geq 0$ 而 W 正定. 所以原点不稳定.

证明: U 表 $V(x)>0$ 的区域. 则 $-V$ 为 (1.1) 在 $G=N\bigcap U$ 上的 Liapunov 函数. 因为 $x\in G$ 蕴含 $T(x)\in G$, 原点的不稳定性由定理 7.15 推出.

7.17. 例 考虑

$$\begin{aligned}x_1'&=g_1(x_1,x_2),\\x_2'&=g_2(x_1,x_2),\quad g_1(0,0)=g_2(0,0)=0.\end{aligned}$$

取 $V=-x_1x_2$, 则 $\dot{V}=x_1x_2-g_1(x)g_2(x)$. 设

(a) 当 $x_1x_2>0$ 时, $g_1(x)g_2(x)>0$,

(b) 当 $x_1x_2>0$, 且 x 充分接近原点 (属于原点的邻域 N) 时, $g_1(x)g_2(x)>x_1x_2$. 则 $x_1x_2>0$ 对应的 G 满足定理 7.15 的条件, 故原点为强不稳定.

7.18. 练习 陈述并证明当 y 属于 U 时对应于定理 7.15 的结论.

8. 向量 Liapunov 函数

常微分方程的向量 Liapunov 函数首先由 [12] 讨论和论证. (关于应用及进一步的参考文献, 有 [30].) 这里我们陈述文 [60] 中关于差分方程的结果. 由单个到向量 Liapunov 函数的推广是直接的. 单个不等式由向量不等式组代替, 本质上没有新的内容. Liapunov 函数之和仍为 Liapunov 函数是一个基本的事实可使表述变得方便. 我们将介绍由经济学家 Arrow, Block 和 Hurwicz 在 [4] 中引入的另外一种由一系列纯量函数构造纯量 Liapunov 函数的方法.

8.1. 记号　对 $x \in R^m$:

$x > 0$ 表示 $x_i > 0$ 对 $i = 1, ..., m$ 成立,

$x \geq 0$ 表示 $x_i \geq 0$ 对 $i = 1, ..., m$ 成立,

$R_+^m = \{x; x > 0, x \in R^m\}$,

$\overline{R_+^m} = \{x; x \geq 0, x \in R^m\}$.

对于矩阵同样有, $B = (b_{ij}) > 0$ $(B \geq 0)$ 表示 $b_{ij} > 0$ $(b_{ij} \geq 0)$, $|B| = (|b_{ij}|)$.

设 $v : R^m \to R^q$ 并且记

$$\dot{v}(x) = v(Tx) - v(x).$$

8.2. 定义　G 为 R^m 中任意集合. 称 v 为 (1.1) 在 G 上的向量 Liapunov 函数, 如果 (i) v 在 R^m 上连续, (ii) $\dot{v}(x) \leq 0$ 对所有 $x \in G$ 成立. 定义 $E = \{x; \dot{v}(x) = 0, x \in \bar{G}\}$, 记 M 为 E 中的最大不变集.

与标量 Liapunov 函数类似, 我们有如下的定理.

8.3. 定理　设 v 为 (1.1) 在 G 上的向量 Liapunov 函数. 如果 $x(n)$ 为 (1.1) 的解且对所有 $n \in J_+$ 有界并属于 G, 则存在 $c \in R^q$ 使得当 $n \to \infty$ 时 $x(n) \to M \bigcap v^{-1}(c)$.

8.4. 例　考虑线性差分方程 (*) $x' = Ax$, 其中 $A \geq 0$ 为 $m \times m$ 矩阵. 假设 $(I - A)^{-1}$ 存在且 $(I - A)^{-1} \geq 0$. 取 $v(x) = (I - A)^{-1}x$, 则 $\dot{v}(x) = -x$, 即 $v(x)$ 为 (*) 在 R_+^m 上的 Liapunov 函数. R_+^m 为正不变且每一个 R_+^m 出发的解有界, 因为对每个 $c \in R^m$, $G_c = \{x; v(x) \leq c, x \geq 0\}$ 有界. M 仅含原点, 所以由定理 8.3, 每个从 R_+^m 中出发的 (*) 的解当 $n \to \infty$ 时趋于 0. 因为 $\overline{R_+^m}$ 包含 R^m 的一个基, 每一个 (*) 的解当 $n \to \infty$ 时趋于 0, 即原点整体渐近稳定.

称 v 为 (1.1) 在 G 上的向量 Liapunov 函数, 意味着 v 的每一分量 v_i 为 G 上的对应于 E_i 和 M_i 的标量 Liapunov 函数. 这样, $V = \sum_{i=1}^{q} v_i$ 也为 (1.1) 在 G 上的标量 Liapunov 函数, 而与 V 相关的集合 E 和 M 与定义

8.2 中向量 Liapunov 函数 v 的集合 E 和 M 是一样的. 而由例 8.4 可知, 向量 Liapunov 函数在表示上更为方便.

推广 Arrow, Block 和 Hurwicz[4] 关于构造 Liapunov 函数的思想, 我们介绍向量 Liapunov 函数, 其分量不必为 Liapunov 函数.

8.5. 定义 设 $w: R^m \to R^q$, 定义 $W(x) = \max_i w_i(x)$ 而 $\overset{o}{w}(x) = w(Tx) - W(x)u$, 其中 $u_i = 1$, $i = 1, ..., q$, ($\overset{o}{w}_i = w_i(Tx) - W(x)$). 我们称 w 为 (1.1) 在 G 上的向量 Liapunov 函数, 如果, (i) w 在 R^m 上连续, (ii) $\overset{o}{w}(x) \le 0$ 对所有 $x \in G$ 成立. 定义 $E = \{x; w(x) \not< 0, x \in \bar{G}\}$, M 为 E 中的最大不变集.

如果 $x \in \bar{G}$ 且对某些 $i = 1, ..., q$, $\overset{o}{w}_i(x) = 0$, 则 $x \in E$. 又由于

$$\overset{o}{w}(x) = \overset{o}{w} + w(x) - W(x)u$$

所以 $\dot{w}(x) \le \overset{o}{w}(x)$, 即条件 $\overset{o}{w}(x) \le 0$ 比条件 $\overset{o}{w}(x) \le 0$ 要弱. 事实上, 在这种意义上 w 可以为一向量 Liapunov 函数, 而其分量均不为 Liapunov 函数. 又 $\dot{W} = \max_i \overset{o}{w}_i(x)$, 所以当 w 为一 G 上的纯量 Liapunov 函数时, W 为 G 上一纯量 Liapunov 函数. 由此马上有如下的定理.

8.6. 定理 如果 (i) w 为 (1.1) 在 G 上的向量 Liapunov 函数, (ii) (1.1) 的解 $x(n)$ 对所有 $n \ge 0$ 属于 G 且有界, 则存在常数 c, 当 $n \to \infty$ 时, 有 $x(n) \to M \bigcap W^{-1}(c)$.

8.7. 例 再考虑线性差分方程 $x' = Ax$. 假设存在 R^m 上的 $c > 0$ 使得 $|A|c < c$. 取 $w_i(x) = |x_i|/c_i$ 而 $W(x) = \max_i |x_i|/c_i$. 则

$$\begin{aligned} w_i(Ax) = \frac{|(Ax)_i|}{c_i} &\le \frac{1}{c_i}\sum_{k=1}^{m}|a_{ik}|c_k\frac{|x_k|}{c_k} \\ &\le W(x)\frac{(|A|c)_i}{c_i} < W(x), \quad x \ne 0. \end{aligned}$$

从而当 $x \ne 0$ 时, $\overset{o}{w}\, w(x) < 0$, $w(x)$ 为 R^m 上的向量 Liapunov 函数. M 为原点. 因为 $|x| \to \infty$ 时, $W(x) \to \infty$, 所以所有解有界, 故当 $n \to \infty$ 时

均趋于原点. 因此, 存在 $c \gg 0$ 使 $|A|c < c$ 为原点整体渐近稳定的一个充分条件.

8.8. 练习　证明:　正不变集之交正不变.

8.9. 练习　证明:　如果 T 为 $1-1$ 映射, 则不变集之交不变.

8.10. 练习　举例说明不变集的交不是不变的.

8.11. 练习　设 $v_i, i=1,...,q$ 为 (1.1) 在 G 上的纯量 Liapunov 函数且 $E_i = \{x; \dot{v}_i(x) = 0, x \in \bar{G}\}$, 而 M_i 为 E_i 中的最大不变集. 定义 $E = \bigcap_{i=1}^{q} E_i$ 和 $M^* = \bigcap_{i=1}^{q} M_i$. 记 M 为 E 中的最大不变集而 M^0 为 M^* 中最大不变集. 证明:　$M = M^0$.

8.12.　注　如果 v 是 G 上在定义 8.2 意义下的向量 Liapunov 函数, 则每个 v_i 是 G 上的纯量 Liapunov 函数. 练习 8.11 的关键是, 如果 $x(n)$ $(n \in J_+)$ 是 (1.1) 在 G 上的有界解, 则由定理 6.3 可知, 对某些常数 c_i, 当 $n \to \infty$ 时, $x(n) \to M_i \bigcap v_i^{-1}(c_i)$ 对 $i = 1,...,q$ 成立, 即 $x(n) \to M^* \bigcap v^{-1}(c)$, 其中 $c = (c_1,...,c_q), v = (v_1,...,v_q)$. 从而当 $n \to \infty$ 时, $x(n) \to M^0 \bigcap v^{-1}(c)$. 而由练习 8.11, 以上结果是显然的.

9. 线性差分方程

9.1. 记号

$A = (a_{ij})$ 为实 $m \times m$ 矩阵,　$\delta(A) = \{\lambda_1,...,\lambda_m\}$ 为 A 特征值之集 (A 的谱),

$r(A) = \max_i |\lambda_i|$ (谱半径),

$Rl\delta(A) = \max_i Rl\lambda_i$,

$A^\tau = (a_{ji})$, A 的转置矩阵,

$A^n = AA^{n-1}$, $A^0 = I$.

一般维数为 m 的线性自治差分方程如下

$$x' = Ax. \tag{9.1}$$

满足条件 $x(0) = x^0$ 的解为 $A^n x^0$. A^n 的列构成了 (9.1) 的主解 (Principal solutions). 如果 v^i 是 A 关于特征值 λ_i 的特征向量, 则 $c_i\lambda_i^n v^i$ 为 (9.1) 之解. 这样, 如果 $r(A) \geq 1$, 则总有解不趋于原点. 如果 $r(A) > 1$, 则有无界解. 如果 A 的特征值不同, 则 (9.1) 的一般解为

$$x(n) = c_1\lambda_1^n v^1 + ... + c_n\lambda_m^n v^m.$$

9.2. 由特征值计算 A^n 的一个算法 此算法与 Putzer 在 [93] 中计算 e^{At} 的算法是相似的.

我们假设 A^n 有如下表示

$$A^n = \sum_{j=1}^{m} w_j(n)Q_{j-1}, \tag{9.2}$$

其中

$$Q_j = (A - \lambda_j I)Q_{j-1}, \quad Q_0 = I. \tag{9.3}$$

由 Hamilton-Cayley 定理, $Q_m = 0$. (每一个矩阵满足其特征方程). 表达式 (9.2) 即受此启示.

取 $w_1(0) = 1, w_2(0) = ... = w_m(0) = 0$, 则满足初始条件 $A^0 = I$. 我们希望有

$$A\sum_{j=1}^{M} w_j(n)Q_{j-1} = \sum_{j=1}^{m} w_j(n+1)Q_{j-1},$$

或者由 $AQ_{j-1} = Q_j + \lambda_j Q_{j-1}$ 有

$$\sum_{j=1}^{m} w_j(n)(Q_j + \lambda_j Q_{j-1}) = \sum_{j=1}^{m} w_j(n+1)Q_{j-1}.$$

这样，(9.2) 就成立了，只要

$$w_1(n+1) = \lambda_1 w_1(n), \quad w_1(0) = 1 \quad (w_1(n) = \lambda_1^n),$$

$$w_j(n+1) = \lambda_j w_j(n) + w_{j-1}(n), \quad w_j(0) = 0, \quad j = 2, ..., m.$$

方程 (9.3) 和 (9.4) 就是根据 A 的特征值计算 Q_j 和 $w_j(n)$ 的算法 (即由 A 的特征值计算 A^n).

为说明问题，我们用此算法求解

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0, \quad y''(0) = y_0'', \quad y'(0) = y_0' \quad y(0) = y_0.$$

这个三阶方程等价于 $x' = Ax$，其中

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\phi(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -(\lambda - 1)^3, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1,$$

$$Q_0 = I, \quad Q_1 = A - I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$Q_2 = (A - I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

直接求解 (9.4) 或利用练习 9.4, 可得 $w_1(n) = 1$, $w_2(n) = n$, $w_3(n) = \frac{1}{2}n(n-1)$. 从而

$$\begin{aligned} A^n &= I + n(A - I) + \tfrac{1}{2}n(n-1)(A - I)^2 \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(n-1)(n-2) & -n(n-1) & \frac{1}{2}n(n-1) \\ \frac{1}{2}n(n-1) & -(n+1)(n-1) & \frac{1}{2}(n+1)n \\ \frac{1}{2}(n+1)n & -(n+2)n & \frac{1}{2}(n+2)(n+1) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

解 $y(n)$ 为 $A^n x^0$ 的第一个分量. 这就给出了 $y(n) = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)y_0 - n(n-2)y_0' + \frac{1}{2}n(n-1)y_0''$.

9.3. 练习 证明: (a) 如果 $r(A) = r_0 < \beta$, 则

$$|w_j(n)| \le \frac{\beta^n}{(\beta - r_0)^{j-1}}, \qquad j = 1, ..., m.$$

(b) 如果 $\alpha < \min_i |\lambda_i|$, 估计 $|w_j(n)|$ 的下界.

由练习 9.3, 我们知道, 如果 $|r(A)| < 1$, 则当 $n \to \infty$ 时, $w_j(n) \to 0$, 从而 $A^n \to 0$. 已经知道, 当 $r(A) \ge 1$ 时, A^n 不趋于 0 $(n \to \infty)$. 由于 $A^n \to 0$, 对应于 (9.1) 的整体渐近稳定, 故 (9.1) 整体渐近稳定当且仅当 $r(A) < 1$. 这时, A 称为是稳定的. 关于矩阵的特征值是否落在单位圆内的计算判准, 参阅 [48].

9.4. 练习 证明

$$\begin{aligned} w_1(n) &= \lambda_1^n, \\ w_j(n+1) &= \textstyle\sum_{k=0}^n \lambda_j^{n-k} w_{j-1}(k), \quad j = 2, ..., m. \end{aligned}$$

9.5. 练习 如果 A 的特征值各异, 则

$$w_1(n) = \lambda_1^n,$$

$$w_j(n) = \sum_{i=1}^{j} c_{ij} \lambda_j^n,$$

其中

$$c_{ij}^{-1} = \prod_{1 \le k < i \le j} (\lambda_i - \lambda_k).$$

9.6. 练习 (常数变易公式) 证明初值问题的解 $(f : J_+ \to R^m)$

$$x' = Ax + f(n), \quad x(0) = x^0$$

在 $n+1$ 时刻为

$$x(n+1) = A^{n+1}x^0 + \sum_{k=0}^{n} A^{n-k} f(k).$$

9.7. 练习 证明

$$y(n+m) + a_1 y(n+m-1) + ... + a_m y(n) = g(n) \tag{9.5}$$

满足 $y(0) = y(1) = ... = y(m-1) = 0$ 的解为

$$y(n+1) = \sum_{k=0}^{n} w(n-k) g(k),$$

其中 w 为齐次方程 $(g(n) \equiv 0)$ 的第 m 个主解，即 w 是

$$y(n+m) + a_1 y(n+m-1) + ... + a_m y(n) = 0$$

满足

$$y(0) = ... = y(m-2) = 0, \quad y(m-1) = 1$$

的解.

因为 $A^{k+1} - A^k = A^k(A-I)$, 我们得到

$$A^{n+1} - I = (A-I)\sum_{k=0}^{n} A^k.$$

如果 $A^{n+1} \to 0$ $(r(A) < 1)$, 则得

$$(I-A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k. \tag{9.6}$$

$R(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$ 称为 A 的预解式. 因此，我们知道，如果 $|\lambda| > r(A)$, 则

$$R(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-(k+1)} A^k. \tag{9.7}$$

考查 (9.1) 的解在什么情况下都趋于一个点是有趣的，当然这个点一定是平衡点. 这等价于 $n \to \infty$ 时， $A^n \to B$. 我们已经知道，当 $n \to \infty$ 时，如果

$r(A) < 1$, 则 $A^n \to 0$, 如果 $r(A) > 1$ 则 A^n 无界. 下面的练习通过考虑剩下的情形 $r(A) = 1$ 给出以上问题的答案. 注意: $\lambda = 1$ 为 A 的预解式的一个单极点等价于 1 为 A 的极小多项式的单根.

9.8. 练习 证明: 如果 $r(A) = 1$, 则 A^n 收敛当且仅当 $\lambda = 1$ 为 A 的预解式的单极点, 即为 A 在单位环上的唯一特征值. (这可由计算 A^n 的算法或计算 A 的若当标准型知道. 参考 [95, 第一章]).

9.9. 练习 证明: 如果 $A^n \to B$ $(n \to \infty)$, 则 $AB = BA = B$, 且 $B^2 = B$.

9.10. 练习 在什么条件下, (9.1) 的解都有界.

为了进一步说明 Liapunov 直接方法和 Liapunov 函数及其应用, 我们将涉及一些关于 A 的稳定性问题.

以下的判准与 Liapunov 最初给出的关于 A 的所有特征值实部为负是相同的 ($e^{At} \to 0$, 当 $t \to \infty$).

记 $V(x) = x^\tau Bx$, 其中 B 为正定. 则关于 (9.1) 有 $\dot{V}(x) = x^\tau(A^\tau BA - B)x$. 从而, 如果 $A^\tau BA - B$ 负定, 则由练习 7.11 可知, (9.1) 渐近稳定且 A 稳定. 反过来, 假如 A 稳定, 考虑方程

$$A^\tau BA - B = -C. \tag{9.8}$$

以上方程有解, 则

$$-\sum_{k=0}^{n}(A^\tau)^k CA^k = (A^\tau)(n+1)BA^{n+1} - B.$$

由 $n \to \infty$ 可知解应有如下形式

$$B = \sum_{k=0}^{n}(A^\tau)^k CA^k.$$

容易验证其为解, 且当 C 正定时, B 也正定.

这样，我们就证明了如下的结果.

9.11. 定理　如果存在正定矩阵 B 和 C 满足 (9.8), 则 A 稳定. 反过来，如果 A 稳定，则给定 C, (9.8) 存在唯一解 B. 如果 C 正定，则 B 正定.

这个结果在线性离散控制系统中起做着重要的作用. 相反的定理是：如果 (9.1) 渐近稳定，则存在正定二次 Liapunov 函数 V, 其 $-\dot{V}$ 正定.

我们得到了定理 9.11 的一个马上要用到的直接结果. 实对称阵 B 称为是不定的，如果 $x^\tau Bx$ 同时取到正和负值 (B 具有正和负的特征值).

9.12. 推论　如果 $r(A) > 1$ 并且对于正定矩阵 C, (9.8) 有唯一解 B, 则 B 对称且 $x^\tau Bx$ 为负.

证明：　如果 B 为解, 则 B^τ 也为解, 从而 $B = B^\tau$. 因为 $r(A) > 1$, 由定理 9.11, B 非正定. 同时，B 不为半正定，否则，存在 $x \neq 0$ 使 $Bx = 0$. 但 $-x^\tau Cx = x^\tau A^\tau BAx \geq 0$, 矛盾.

下面的练习将给出 (9.8) 有唯一解的条件. 类似的结果是 $A_1X - A_2X = C$ 有唯一解当且仅当 A_1 和 A_2 无公共特征值.

9.13. 练习　A_1 为 $m \times m$ 矩阵，A_2 为 $n \times n$ 矩阵；C 和 X 为 $m \times n$ 矩阵. 证明：方程 $A_1XA_2 - X = C$ 有唯一解当且仅当 A_1 的特征值与 A_2 的特征值不互为倒数. （提示：假如 A_1 和 A_2 满足如上条件，利用 Hamilton-Caley 定理证明存在 k 次多项式 $\Phi(\lambda)$ 使得 $\Phi(A_1) = I$ 且 $\Phi^*(A_2) = 0$, 其中 $\Phi^*(\lambda) = \lambda^k\Phi(1/\lambda)$, 利用此证明充分性，因为 $X = A_1XA_2$ 蕴含 $\Phi(A_1)X = A_1^kX\Phi^*(A_2)$.)

1929 年，Perron[91] 考虑了线性渐近 $x' = Ax$ 的稳定性决定非线性方程

$$x' = Ax + f(n, x), \tag{9.9}$$

稳定性的问题，其中 $f(n,x)$ 为 $o(x)$ 关于 $n \geq 0$ 一致成立 (即，任给 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得 $||x|| < \delta$ 时，$||f(n,x)|| < \epsilon||x||$ 关于所有 $n \geq 0$ 和 $||x|| < \delta$

成立). 这样在原点附近, 非线性部分可以忽略, 除临界情形 $r(A)=1$, 稳定性可由线性近似决定. 这是下一个结果的主要内容. 在这里稳定性即原点的稳定性, 我们不讨论非自治系统的稳定性, 只考虑如下的系统

$$\dot{x} = Ax + f(x), \tag{9.10}$$

对于 (9.9), 其结论和证明是完全一样的, 渐近稳定是一致的. Perron 曾给过一个不同的证明.

9.14. 定理 (线性渐近的稳定性) 设 $f(x)$ 为 $o(x)$. 如果 A 稳定, 则原点为 (9.10) 的渐近稳定的平衡点. 如果 $r(A)>1$, 则原点不稳定.

证明: 假设 A 稳定, 则存在正定矩阵 B 满足 (9.8). 为方便起见, 取 $C=I$, $V(x)=x^\tau Bx$. 则相对于 (9.10) 有

$$\dot{V}(x) = -x^\tau x + 2x^\tau Bf(x) + V(f(x)).$$

对任意 $0<\alpha<1$, 可取 δ 充分小使得

$$\dot{V}(x) \le -x^\tau x, \quad ||x||<\delta.$$

从而 V 和 $-\dot{V}$ 正定, 原点渐近稳定.

如果 $r(A)>1$ 取 $\beta>0$ 使 $(1+\beta)^{-1/2}A$ 的特征值不为 A 的特征值的倒数, 且 β 充分小使得 $(1+\beta)^{1/2}<r(A)$. 则由练习 9.13 和推论 9.12, 存在矩阵 B 或负定或不定且满足

$$A^\tau BA - B = \beta B - I.$$

取 $V(x)=-x^\tau Bx$, 则关于 $0<\alpha<1$ 和充分小 δ, 有

$$\dot{V}(x) = \beta V(x) + W(x),$$

其中 $W(x)\ge \alpha x^\tau x$ 关于所有 $||x||<\delta$ 成立. 由推论 7.16, 原点不稳定.

9.15. 练习 (公开问题)　如果 $r(A) > 1$, 则原点关于线性系统强不稳定 (既不稳定又非吸引). A 在什么条件下原点关于非线性方程 (9.10) 强不稳定? 一个已知的充分条件是 A 的所有特征值落在单位圆之外.

通过线性近似系统来判断稳定性曾经是, 现在仍然是应用中的重要方法. 直到 1950 年, 这个方法 (可追逆到 Maxwell[69], [70], 1868) 几乎是控制系统, 反馈装置的设计和分析中的唯一方法. 应该注意的是, 此方法所得到的结果是局部的, 而从实际的观点来看可能是完全错误的. 虽然平衡点是局部稳定的, 但其稳定的区域非常小, 而实际上, 它应视为不稳定的. 相反, 一个围绕平衡点的稳定的振荡在数学上表示该系统是不稳定的, 但其振荡非常小又可以忽略. Liapunov 方法的优势在于, 当它被成功地应用之后, 考虑到了非线性因素并且给出了稳定的程度.

非负矩阵 $A = (a_{ij})$ 满足 $a_{ij} \geq 0$, 记为 $A \geq 0$. 这类矩阵非常重要并且出现在很多应用之中而被广泛的研究 (参考 [11], [28]). 例如, 线性差分方程 $x' = Ax$ 可以是关于一个系统的数学模型, 其状态变元只在非负情况下 $(x \geq 0)$ 有意义, 如: 种群, 价格, 粒子数, 等等. 此时 A 非负, 而这等价于 R^m_+ 正不变. 关于稳定的非负矩阵有很多刻划, 为了说明稳定性的结论和以后的应用, 我们在如下定理中列出几个.

9.16. 定理　如果 $A \geq 0$, 则如下结论等价:

(i) $r(A) < 1$,

(ii) $(A - I)^{-1} \leq 0$,

(iii) 存在 $c > 0$ 使 $Ac < c$ 成立,

(iv) 存在 $c > 0$ 使 $c^\tau A < c^\tau$ 成立,

(v) $Rl(\sigma(A - I)) < 0$,

(vi)$I - A$ 的主子式均正.

证明:　我们证明前四个结论的等价性. (iii), (iv) 及 (vi) 的等价性由 [28] 给出. 在例 8.4 和 8.5 中, 已证 (ii)⇒(i) 及 (iii)⇒(i). 由 (9.6), 有 (i)⇒(ii). 为证 (ii)⇒(iii) 对任意 b 取 $c = (I - A)^{-1}b$, 则由 $(I - A)^{-1}$ 非奇异且非负,

可得 $c>0$. 前三条的等价得证. 与 (iv) 的等价性是因为 $r(A)=r(A^\tau)$.

9.17. 练习 证明: $r(A)\geq r(|A|)$.

10. 整体渐近稳定

我们首先给出如下关于整体渐近稳定的结果, 它是定理 7.9 的直接推论.

10.1. 推论 假设 (i) V 为 $\dot{x}=Tx$ 在 R^m 上的 Liapunov 函数, (ii) $G_c=\{x;V(x)<c\}$ 对每个 c 有界, (iii) M 紧, 则 M 整体吸引. 如果进一步, (iv) V 在 M 上为常数, 则 M 整体渐近稳定.

10.2. 练习 证明: 如果当 $\|x\|\to\infty$ 时, $V(x)\to\infty$, 则 G_c 关于每个 c 有界.

我们想要提出和回答一些关于平衡点整体渐近稳定的问题. 提出的比回答的要多一些. 考虑

$$x'=Tx,\quad T(0)=0. \tag{10.1}$$

我们已经将平衡点移至原点, 并且当 (10.1) 的原点为整体渐近稳定时, 称 (10.1) 为整体渐近稳定.

当 $m=1$ 时, 我们有 $\dot{x}=T(x)=a(x)x$, 其中当 $x\neq0$ 时, $a(x)=T(x)/x$. 当 $x\neq0$ 时, $|a(x)|<1$ 为整体渐近稳定的一个充分条件. 如果 $a(x)\geq0$, 则为充要条件. 如果 Tx 属于 C^1, 则 $a(x)=\int_0^1 T'(sx)ds$ (T' 表导数), 而 $|T'(x)|<1$ ($x\neq0$ 时) 为整体渐近稳定的一个充分条件.

一个一般性的问题是: 怎样将这些条件推广到高维情形? 如果 T 是 C^1 的, 则可寻找 Jacobian 矩阵的条件使其保证整体渐近稳定性. 或者将 $T(x)$ 写成 $T(x)=A(x)x$, 其中 $A(x)$(假设 T 在 R^m 上连续) 为一 $m\times m$ 矩阵函数, 而考虑方程

$$x'=A(x)x. \tag{10.2}$$

如果 $T(0)=0$ 而 T 为 C^1 的, 则 $T(x)=\int_0^1 T'(sx)xds$ 而 $A(x)=\int_0^1 T'(sx)ds$ 总使得 $T(x)=A(x)x$. 但一般来说, $B(x)x=0$ 关于所有 x 成立并不蕴含 $B(x)=0$ 关于所有 x 成立, 所以方程 (10.2) 中的 $A(x)$ 不一定唯一. 注意, 如果 $A(x)$ 在原点连续, 则 $A(0)$ 稳定蕴含了原点的渐近稳定. 这由定理 9.14 可推出. 同样, 如果 T 为 C^1 且 $T'(0)$ 稳定, 结论同样成立.

10.3. 记号　对 $B=(b_{ij})$, 记 $|B|=(|b_{ij}|)$, $||B||=\max_{||x||=1}||Bx||$.

10.4. 练习　记 $\phi(B)=|B|$ 或 $\phi(B)=||B||$, 证明:

(a) $\phi(B)$ 正定 (即, $\phi(B)\geq 0$ 且 $\phi(B)=0$ 当且仅当 $B=0$)

(b) 如果 AB 有定义, 则 $\phi(AB)\leq\phi(A)\phi(B)$.

(c) 如果 $A+B$ 有定义, 则 $\phi(A+B)\leq\phi(A)+\phi(B)$.

(d)$\phi(\alpha B)\leq|\alpha|\phi(B)$.

关于整体渐近稳定, 当 $m=1$ 时的充分条件的可能可以推广为: $(x\neq 0)$

C_1: $r(A(x))<1$,

C_2: $r(T'(x))<1$,

C_3: $r(|A(x)|)<1$,

C_4: $r(|T'(x)|)<1$.

关于这些条件我们知道不多, 还有很多公开问题. 另一方面, 容易说明如下的条件 (比上面的强得多且不一定是独立的) 是整体渐近稳定的充分条件: (对任意 $x\neq 0$)

C_5: 存在非奇异矩阵 Q 使, $||QT(x)||<||Qx||$.

C_6: 存在非奇异矩阵 Q 使, $|QT(x)|<|Qx|$.

C_7: $|T(x)|<B|x|$, B 稳定.

C_8: $A^\tau(x)BA(x)-B$ 关于正定矩阵 B 为负定.

C_9: T 为 C^1 且存在正定矩阵 B, 使对 $x\neq 0$ 和 $y\neq 0$, $T'^\tau(x)BT'(y)-B$ 为负定.

C_{10}: $|A(x)|\leq B$ 且 B 稳定.

C_{11}: T 为 C^1, $|T'(x)|\leq B$ 且 B 稳定.

10.5. 练习 证明:

(a) C_5 等价于 C_8;

(b) C_9 蕴含 C_8;

(b) C_{11} 蕴含 C_{10}, C_{10} 蕴含 C_7;

(d) C_8 蕴含 C_1;

(b) C_9 蕴含 C_2.

10.6. 定义 H 为 R^m 中闭集, G 为 R^m 中正不变集, 且 $H \subset \bar{G}$. H 相对 G 稳定意味着是关于 G 的相对拓扑稳定. 同样可以定义 H 为 G 的相对吸引子. 如果相对 G, H 稳定和吸引, 则 H 相对 G 渐近稳定. 如果 H 相对 G 稳定且对每个 $x \in G, T^n x \to H$, 则 H 相对 G 整体渐近稳定.

这样, 在没有 $M \subset G$ 的假设下, 定理 7.9 给出了 M 相对 G 整体渐近稳定的一个充分条件. 定理 7. 9 的另一个变形则为如下常用的结果.

10.7. 定理 G 为有界开集, 且关于 (10.1) 正不变. 假设 V 为 (10.1) 在 G 上的 Liapunov 函数且对 $x \in G, x \neq 0$, 有 $\dot{V}(x) < 0$. 记 E_0 为 G 边界上的使得 $\dot{V}$ 为零的点. 设 M_0 为 E_0 中的最大不变集, 则所有从 G 出发的解趋于 $M = M_0 \bigcup \{0\}$. (i) 如果 $M = \{0\}$, 则原点关于 G 整体渐近稳定. (ii) 如果 $0 \in G$, 则 G 中出发的每个解当 $n \to \infty$ 时趋于 0 或 M_0. 如果 $n \to 0$ 时, 没有解趋于 M_0, 则原点渐近稳定且相对于 G 整体渐近稳定.

10.8. 例 一个离散流形病模型 (淋病). 考虑两个异性群体, 一个群体的感染者可能传染病毒给另一个群体的易感染者. 康复是可能的但无免疫性, 群体为常数. 记 x_i 为被感染者 P_i 的比例, 则 $(1 - x_i)$ 为易感染者比例. 一个既简单又合理的离散模型为

$$x_1(n+1) = a_1 x_2(n)(1 - x_1(n)) + (1 - b_1)x_1(n),$$
$$x_2(n+1) = a_2 x_1(n)(1 - x_2(n)) + (1 - b_2)x_2(n),$$

即

$$x' = A(x)x,$$

其中 $0 < a_i < 1, 0 < b_i < 1$, 而

$$A(x) = \begin{pmatrix} 1-b_1 & a_1(1-x_1) \\ a_2(1-x_2) & 1-b_2 \end{pmatrix}.$$

记 $G = \{x; 0 < x_i < 1\}$, 则如希望的, G 及 $\bar{G}$ 均为正不变. 实际上, $T(\bar{G}-\{0\}) \subset G$. 为理解这种推广，我们注意,

$$A(x) = I + A_0 + A_1(x)$$

其中 $A(x) \geq 0, I + A_0 \geq 0$, 而 $A_1(x) \leq 0$ 关于 $x \in \bar{G}$ 成立. 而 $A_1(0) = 0$. 对 $n = 2$

$$A_0 = \begin{pmatrix} -b_1 & a_1 \\ a_2 & -b_2 \end{pmatrix}.$$

而

$$A_1(x) = \begin{pmatrix} 0 & -a_1x_1 \\ -a_2x_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

分两种情形考虑: (i) $r(I + A_0) \leq 1$, (ii) $r(I + A_0) > 1$.

情形 (i). 应用定理 9.1 于 $(1-\epsilon)A$. 且令 $\epsilon \to 0^+$, 则 $r(I + A_0) \leq 1$ 当且仅当 $-A_0$ 的所有主子式非负，此等价于存在 $c > 0$ 使 $c^\tau A_0 \leq 0$. 取 $V(x) = c^\tau x$, 则有

$$\dot{V}(x) = c^\tau(A_0 + A_1(x))x \leq 0, \quad x \in \bar{G},$$

而 $x \in G$ 时, $\dot{V}(x) < 0$, 因为 $T(\bar{G} - \{0\}) \subset G$, 故有 $M = \{0\}$, 由定理 10.7, 原点相对于 $\bar{G}$ 整体渐近稳定.

当 $n = 2$ 时，对应于 $\det A_0 = b_1b_2 - a_1a_2 \leq 0$, 记 $c^\tau = (b_2, a_1)$, 则有

$$\dot{V}(x) = (a_1a_2 - b_1b_2)x_1 - a_1(a_2 + b_2)x_1x_2.$$

在最坏的情形，当 $det A_0 = 0$ 时, E_0 为坐标轴与 $\bar{G}$ 之交，故 $M = \{0\}$.

情形 (ii). 由线性渐近方程 $x' = (I + A_0)x$ 可知，原点不稳定. G 内在原点附近 $V(x)$ 和 $\dot{V}(x)$ 均为正，从而从 $\bar{G} - \{0\}$ 出发的解当 $n \to \infty$ 时

不趋于原点．（实际上，容易证明所有解趋于一个不变集且 G 内必有唯一平衡点.）

当 $n=2$ 时，平衡点为

$$x_1^0=\frac{1-r_1r_2}{1+r_1},\quad x_2^0=\frac{1-r_1r_2}{1+r_2},$$

其中 $r_i=b_i/a_i$, 而 $r(I+A_0)>1$ 对应 $b_1b_2-a_1a_2<0$(即 $r_1r_2<1$). 对此平衡点作变换 $u=x-x^0$, 我们有

$$u'=B(x)u,$$

其中

$$B(x)=\begin{pmatrix} 1-a_1\rho & a_1(1-x_1) \\ a_2(1-x_2) & 1-a_2\rho^{-1} \end{pmatrix}.$$

而 $\rho=(1+r_1)/(1+r_2)$. 注意

$$(a_2,a_1\rho)\begin{pmatrix} -a_1\rho & a_1 \\ a_2 & -a_2\rho^{-1} \end{pmatrix}=0.$$

取

$$V(u)=a_2|u_1|+a_1\rho|u_2|.$$

则当 $1-a_1\rho\geq 0$ 且 $1-a_2\rho^{-1}\geq 0$ 时,

$$\dot V(u)\leq -a_1a_2(x_1|u_1|+\rho x_2|u_1|)\leq 0,$$

对 $x\in G$ 成立. 在 x 坐标系中，定理 10.7 的 M_0 为原点，因为 $\bar G-\{0\}$ 中的解均不趋于 M_0, x^0 $(u=0)$ 相对于 $\bar G-\{0\}$ 整体渐近稳定. 注意，当 $a_i+b_i\leq 1$ 时，有 $1-a_1\rho\geq 0$ 和 $1-a_2\rho^{-1}\geq 0$. 如果时间单位充分小，此条件总是满足的 (当时间单位趋于零时， $a_i+b_i\to 0$). 我们希望 $r_1r_2<1$ 时， x^0 相对于 $\bar G-\{0\}$ 总是整体渐近稳定的，但我们的方法依赖于 G 上 $B(x)\geq 0$. 由练习 10.9, x^0 总是渐近稳定的.

10.9. 练习 通过考查线性渐近在 $u=0$ 点，证明上例中， x^0 当 $r_1r_2<1$ 时渐近稳定. （维数为 2 时，矩阵 B 的特征根落在单位圆内部当

且仅当 $|\mathrm{det}B| < 1$, 且 $|\mathrm{trace}B| < 1 + \mathrm{det}B$. 关于一般的判准及算法，参阅 [48].)

10.10. 练习　在如上的传染病模型中，引入第三个群体，他们既感染本群体又传染其他的群体 (用通俗的说法，他们是 AC-DC), 讨论该模型.

11. 扰动下的稳定性

到此, 我们仅考虑了在初始状态 x 的扰动下 $T^n x$ 的渐近性态. 应用中，更重要的问题是: T 在扰动下的稳定性如何？直到 30 年代, 关于 Liapunov 函数存在的逆定理给出之后，关于这个问题常微分方程方面只得到部分解答. 关于差分方程的对应理论由 Halanay 于 1963 年在 [34] 中给出. 逆定理是一个非常重要的理论工具，我们将不加证明地利用. 根据 Auslander 和 Seibert 在 [9],[10] 及 [96] 中关于抽象连续动力系统的工作，我们陈述一个比 Halanay 的更强的关于扰动下 T 的稳定性的结果. 关于 T 连续性的假设稍强一些，则渐近稳定等价于扰动下的强稳定. 这个结果关于渐近稳定性有实际的重要意义.

考虑

$$x' = T(x), \quad T(0) = 0. \tag{11.1}$$

现在，在 Liapunov 意义下定义的稳定性和渐近稳定性是相对于初始条件的扰动的. 在实际问题中，任何东西都是未知的，系统不断地被扰动，一个好的扰动模型应该是

$$x' = T(x) + P(n, x), \tag{11.2}$$

其中 $P(n,x)$ 未知但较小. 当然，仅由 (11.1) 的稳定性是不能推出扰动系统 (11.2) 的稳定性. 要建立扰动系统渐近稳定性和稳定性的关系，有必要假设 T 在平衡态附近的 Lipschitz 条件，即对某个 $L_1 > 0$ 存在 $r > 0$, 当 $||x|| < r$, $||y|| < r$ 时,

$$||T(x) - T(y)|| \le L_1 ||x - y||. \tag{11.3}$$

证明要用到如下的逆定理 [34].

11.1. 定理 如果 T 在原点附近 Lipschitz 连续且原点渐近稳定，则存在正定 Liapunov 函数 V 在原点附近 Lipschitz 连续且 $\dot{V}$ 负定，即存在 $r_0 > 0$ 和 $L_2 > 0$, 当 $||x|| < r_0$ 且 $||y|| < r_0$ 时， $|V(x) - V(y)| \leq L_2||x - y||$. $V(0) = 0$, 且 $V(x) > 0$, $\dot{V}(x) < 0$ 对所有 $0 < ||x|| < r_0$ 成立.

11.2. 定义 $x^*(n,x)$ 表示 (11.2) 满足 $x^*(0,x) = x$ 的解. 原点 ((11.1) 的平衡点) 称为是扰动下稳定的，如果有 ϵ_0, 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta_1(\epsilon)$ 和 $\delta_2(\epsilon)$ 使得 $||x|| < \delta_1(\epsilon)$ 和 $||P(n,x)|| \leq \delta_2(\epsilon)$ (对所有 $n \in J_+$ 和 $||y|| \leq \epsilon_0$) 蕴含 $||x^*(n,x)|| < \epsilon$ 对所有 $n \in J_+$ 成立. 另外，如果存在 δ_0, r_0 和 $N(\epsilon)$ 使得 $||x|| < \delta_0$ 且 $||P(n,y)|| \leq \delta_2(\epsilon)$ (对所有 $n \in J_+$ 和所有 $||y|| < r_0$) 蕴含 $||x^*(n,x)|| < \epsilon$ (对所有 $n \geq N(\epsilon)$), 则原点称为扰动下强稳定.

利用定理 11.1 可以证明如下结果成立.

11.3. 定理 如果 T 在原点的邻域 Lipschitz 连续，则原点在扰动下强稳定当且仅当非扰动系统 (1.1) 渐近稳定.

[34] 中，在关于 T 的同样假设下， Halanay 仅证明了非扰动系统的渐近稳定性蕴含了扰动稳定.

第二章

常微分方程・局部动力系统

1. 引言

稳定性理论是 Liapunov[66] 于 1892 年针对常微分方程提出的. 在我们推广的 Liapunov 理论中起中心作用的正, 负极限集概念至少可追溯到 Hadamard(1897 年). 在 [31] 中, 他称极限集为 " le domaine du mouvement " 并且证明了它是不变的. 1912 年, Birkhoff[14] 更细致地研究了极限集, 得到了当 $n \to \infty$ 时, 解趋于其极限集的结论. 在文 [14] 和文献 [15] 的第七章中 (于 1924 年首次出版)Birkhoff 建立了动力系统一般理论的基础 (参阅 [29], [84], [99], [112], [13], [59]).

前面已经给出了差分方程的稳定性理论, 我们现在沿同样的思路考虑微分方程. 这样做的必要性是显然的, 我们可以进行得更快. 所有情形, 证明是容易的且几乎与 [58] 中的一样. [58] 中没有假设解的唯一性, 而为了 $\dot{V}$ 是良定义的, V 有较好的光滑性假设 (局部 Lipschitz 连续). 在 [58] 中, 集合 G 的闭包假设包含在微分方程的定义域 G^* 中. 这不是必要的, 在应用中也不方便, 这里去掉这个假设. 对常微分方程来说, 解关于时间双向都是唯一的, 运动是连续曲线, 解可以在有限时间内趋于无穷. 这样, 虽然过程与第一章是相同的, 但结果是不同的, 并且在有些方面更为有趣.

2. 自治常微分方程

2.1. 记号

$R = (-\infty, \infty)$, 实数;

$R_+ = [0, \infty)$, 而 $R_- = (-\infty, 0]$;

$f : G^* \to R^n$, G^* 为 R^n 中开集.

我们总是假设 f 连续并且

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(x) \tag{2.1}$$

在 G^* 中满足 $\pi(0,x^0)$ 的解 $\pi(t,x^0)$ 唯一.

2.2. 定义 记 $\phi:(\alpha,\omega)\to G^*$, 其中 $-\infty\le\alpha<0<\omega\le\infty$. 点 p 称为是 ϕ 的正 (负) 极限点, 如果存在 $t_n\in(\alpha,\omega)$ 使得当 $n\to\infty$ 时, $t_n\to\omega(t_n\to\alpha)$ 且 $\phi(t_n)\to p$. 所有 ϕ 的正 (负) 极限点的集合 $\Omega(\phi)$ $(A(\phi))$ 称为 ϕ 的正 (负) 极限集. 区间 (α,ω) 称为是最大的 (相对于 G^*), 如果 $\omega<\infty$ 蕴含 $\Omega(\phi)\bigcap G^*$ 空或者当 $-\infty<\alpha$ 时, $A(\phi)\bigcap G^*$ 为空.

3. 解的基本性质

由常微分方程的理论, 我们有如下解的性质 (对于我们的需要是基本的):

P_1(存在性). 对每个 $x\in G^*$, (2.1) 满足 $\pi(0,x)=x$ 的解 $\pi(t,x)$ 有一个最大存在区间 $I(x)=(\alpha(x),\omega(x))$, $-\infty\le\alpha<0<\omega\le\infty$.

P_2(半群性质, 唯一性). 对所有 $s\in I(x)$ 和所有 $t\in I(\pi(s,x))$, $t+s\in I(x)$ 且 $\pi(t,\pi(s,x))=\pi(t+s,x)$.

P_3(连续依赖性). π 连续, 即 $(t_n,x^n)\in I(x^n)\times G^*$ 和 $(t_n,x^n)\to(t,x)\in I(x)\times G^*$ 可推出 $\pi(t_n,x^n)\to\pi(t,x)$.

P_4. $I(x)$ 在 G^* 上下半连续, 即, 如果 $x^n\to x\in G$, 则 $I(x)\subset\liminf I(x^n)=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}I(x^n)$ (如果 $t\in I(x)$, 则 $t\in I(x^n)$ 对所有大 n 成立).

我们所需要的连续性是: 给定 $x^n\to x\in G^*$ 和 $t\in I(x)$, 有 $\pi(t,x^n)\to\pi(t,x)$. 这个较弱的性质可由 P_3 和 P_4 推出. 局部动力系统即满足如上性质的映射 π. 如果对所有 $x\in G^*$, $I(x)=(-\infty,\infty)$, 则 π 为动力系统.

3.1. 定义 解 $\pi(t,x)$ 称为是正 (负) 准紧的, 如果对所有 $t\in[0,\omega(x))$ $(t\in(\alpha(x),0])$ 有界且正 (负) 极限点不属于 G^* 的边界. 即相对于 G^* 准紧.

正准紧对应于旧的术语 "正 Lagrange 稳定". 注意, 因为 $\omega(x)$ 最大, $\pi(t,x)$ 正准紧蕴含了 $\omega(x)=\infty$. 我们用 $\Omega(x)$ 和 $A(x)$ 表示 $\pi(t,x)$ 的正和负极限集.

3.2. 练习　证明:

$$\Omega(x) = \bigcap_{0<\beta<\omega(x)} \overline{\pi([\beta,\omega(x)),x)}.$$

4. 不变性

4.1. 定义　相对于 (2.1), 集合 $H \in R^n$ 称为是正 (负) 不变的, 如果 $x \in H \bigcap G^*$ 蕴含 $\pi(t,x) \in H$, 对所有 $t \in [0,\omega(x))$ $(t \in [\alpha(x),0))$ 成立. H 称为是弱不变的, 如果它是正 (负) 不变的. 如果 $I(x) = (-\infty,\infty)$ 对每个 $x \in H \bigcap G^*$ 成立, H 称为不变的.

注意:　如果 H 相对于 G^* 准紧和弱不变, 则 H 不变.

4.2. 练习　证明:

(a) 正 (负) 不变集的闭包是正 (负) 不变的, 从而, 弱不变集的闭包弱不变.

(b) 如果 H 不变且相对于 G^* 准紧, 则 $\bar{H}$ 不变.

4.3. 练习　E 为 G^* 中的集合. 记 M 为 E 中的最大不变集 (依包含). 证明:

(a) M 为所有在 $(-\infty,\infty)$ 上定义的且对所有 t 属于 E 的解之集.

(b) x 属于 M 当且仅当 $I(x) = (-\infty,\infty)$, 且对所有 t, $\pi(t,x) \in E$.

(c) 如果 E 紧, 则 M 紧.

将以上结果与第一章练习 4.10 相比较.

5. 极限集的基本性质

我们仅考虑正极限集, 负极限集的结果是相同的, 只需将 t 换为 $-t$.

5.1. 定理　正极限集闭且弱不变.

证明: 直接地或由练习 3.2, 每个正极限集 $\Omega(x)$ 为闭. 设 $y \in \Omega(x) \bigcap G^*$ 而 $t \in I(y)$. 因为 $\Omega(x) \bigcap G^*$ 非空, $\omega(x) = \infty$ 且存在序列 t_n 使得 $t_n \to \infty$ 并且 $\pi(t_n, x) \to y$. 由 P_4 之后的注可知, 对充分大的 n, $t \in I(\pi(t_n, x))$ 且当 $n \to \infty$ 时, $\pi(t, \pi(t_n, x)) = \pi(t + t_n, x) \to \pi(t, y)$. 因此 $\pi(t, x) \in \Omega(x)$, 即 $\Omega(x)$ 弱不变.

5.2. 定理 如果 $\pi(t, x)$ 正准紧, 则 $\Omega(x)$ 属于 G^*, 非空, 紧, 连通, 不变且当 $t \to \infty$ 时为 $\pi(t, x)$ 趋于的最小闭集.

证明: $\pi(t, x)$ 的正准紧性蕴含了 $\Omega(x)$ 非空, 属于 G^* 且紧. 因为, 由定理 5.1, $\Omega(x)$ 弱不变, 所以不变. 剩下的证明与第一章的定理 5.2 相同 (连通性甚至更为简单).

正极限集非不变和非连通的例子由附录 A 中图 2 给出. 注意, 在这个例子中, 解不趋于其正极限集.

5.3. 练习 证明: 如果 $\Omega(x) \subset G^*$ 非空并且紧, 则当 $n \to \infty$ 时, $\pi(t, x) \to \Omega(x)$. 从而推出: 如果 $\Omega(x) \subset G^*$ 非空, 则 $\Omega(x)$ 紧当且仅当 $\pi(t, x)$ 正准紧.

6. Liapunov 函数 • 推广的 Liapunov 直接法

设 $V : G^* \to R$ 并且定义

$$\dot{V} = \liminf_{t \to 0^+} \frac{1}{t}(V(\pi(t, x)) - V(x)). \tag{6.1}$$

这样, 如果 $\phi(t) = V(\pi(t, x))$ 而 $D_+\phi(t)$ 表右下导数, 则 $D_+\phi(t) = \dot{V}(\pi(t, x))$. 按这种一般的形式来定义 $\dot{V}$ 也是合理的, 尽管计算看起来依赖于解 $\pi(t, x)$. 如果不假设解的唯一性, 则 $\dot{V}(x)$ 是否良定义是不清楚的. (在 [58] 和附录 A 中, 没有假设唯一性.) 在应用中 V 通常是 C^1 的, 而 $\dot{V}(x) = V'(x) \bullet f(x)$, 这里 $V'(x) = \mathrm{grad} V(x)$, $\dot{V}$ 可以从微分方程中直接算得.

6.1. 定义 设 $V : G^* \to R$, G 为 G^* 的任意子集. V 称为 (2.1) 在 G 上的 Liapunov 函数, 如果 (i) V 连续, (ii) $\dot{V}(x) \le 0$ 关于所有 $x \in G$ 成立.

如下为积分论中的标准结果 [71,P200].

6.2. 引理 设 $\phi:[a,b]\to R$. 假如

(i) ϕ 在 $[a,b)$ 上为左下半连续 (即 $\liminf_{b\to t_0^-}\phi(t)\geq\phi(t_0)$ 对每个 $a\leq t_0<b$) 成立),

(ii) $D_+\phi(t)=\liminf_{h\to 0^+}(1/t)(\phi(t+h)-\phi(t))\leq 0$ 最多除去一个可数点集在 $[a,b)$ 上成立,

则 ϕ 在 $[a,b)$ 上单调不增，从而几乎处处可微，满足 $\phi(t)-\phi(a)\leq\int_a^b\phi'(s)ds$, $t\in[a,b)$.

这样，我们知道，如果 V 为 (2.1) 在 G 上的 Liapunov 函数，而当 $t\in[0,\beta)$, $\beta<\omega(x)$ 时，$\pi(t,x)$ 属于 G, 则 $V(\pi(t,x))$ 在 $[0,\beta)$ 上单调不增. 事实上，在 $[0,\beta)$ 上有， $V(\pi(t,x))-V(x)\leq\int_0^t\dot V(\pi(s,x))ds$.

6.3. 记号 相对于 (2.1) 在 G 上的 Liapunov 函数 V, 我们引入如下记号

$$E=\{x;\dot V(x)=0,\quad x\in\bar G\bigcap G^*\},$$

M 为 E 中的最大不变集， M^* 为 E 中最大弱不变集， M^+ 为 E 中最大正不变集. 如果 M^* 紧，则 $M=M^*$. 注意有， $M\subset M^*\subset M^+$. M^+ 最易确定，虽然这些集合可能不同，但通常都有 $M=M^+$.

6.4. 定理 (不变性原理) 设 V 为 (2.1) 在 G 上的 Liapunov 函数，而 $x(t)=\pi(t,x^0)$ 为 (2.1) 的解且对所有 $t\in[0,\omega(x^0))$ 属于 G. 则存在 c, 使得 $\Omega(x^0)\bigcap G^*\subset M^*\bigcap V^{-1}(c)$. 如果 $x(t)$ 准紧，则 $x(t)\to M\bigcap V^{-1}(c)$.

证明： 假设 $y\in\Omega(x^0)\bigcap G^*$, 则 $\omega(x^0)=\infty$ 且存在序列 t_n 使得当 $n\to\infty$ 时， $x(t_n)\to y$. 这样，当 $n\to\infty$ 时， $V(x(t_n))\to V(y)$. 因为 $V(x(t))$ 关于 t 单调不增， $V(x(t))\geq V(y)$ 关于 $t\geq 0$ 成立且当 $t\to\infty$ 时 $V(x(t))\to c$. 从而有 c 对每个 $y\in\Omega(x^0)$ 有 $V(y)=c$. 又 $\Omega(x^0)$ 弱不变，因此 $\Omega(x^0)\subset E$, 从而属于 M^*. 第一个结论得证. 如果 $x(t)$ 准紧，则

$\Omega(x^0)$ 不变且 $\Omega(x^0) \subset M \bigcap V^{-1}(x)$. 因为 $t \to \infty$ 时， $x(t) \to \Omega(x^0)$, 所以 $x(t) \to M \bigcap V^{-1}(c)$.

当 $x(t) = \pi(t, x^0)$ 准紧时，我们知道 $\Omega(x^0)$ 是连通的. 如下结果由定理 6.4 直接推出，而且说明了 Liapunov 函数可用于建立平衡点 ($f(x)$ 的零点) 的存在性.

6.5. 推论 设 V 为 (2.1) 在 G 上的 Liapunov 函数而 $x(t)$ 为 (2.1) 的准紧解关于 $t \geq 0$ 属于 G. 如果对每个 c, M(或 E) 与 $V^{-1}(c)$ 的交点孤立，则当 $t \to \infty$ 时， $x(t)$ 趋于 (2.1) 的一个平衡点.

6.6. 例

$$\dot{x}_1 = -x_1|x_2|^{\alpha},$$

$$\dot{x}_2 = -x_2|x_1|^{\beta}, \quad \alpha > 0,\ \beta > 0.$$

取 $V = x_1^2 + x_2^2$, 则 $\dot{V}(x) = -2(x_1^2|x_2|^{\alpha} + |x_1|^{\beta}x_2^2)$, V 为 R^2 上的 Liapunov 函数. 这里 $E = M$ 为坐标轴之合，对每个 c, $V^{-1}(c) \bigcap M$ 为点 $(0, \pm c)$, $(\pm c, 0)$ 之集合. 每个解有界且当 $t \to \infty$ 时趋于这些平衡点之一.

如下定理 6.4 的另一个推论在建立不稳定性时将起重要作用.

6.7. 推论 设 V 为 (2.1) 在 G 上的 Liapunov 函数，记 $x(t) = \pi(t, x^0)$ 为 (2.1) 存在于 $t \in [0, \omega(x^0))$ 中属于 G 的解. 假设 $G^* = R^n$ (或者 $\Omega(x^0) \subset G^*$). 如果 M^* 空或 $x(t)$ 在 M^* 中无正极限点，则在有限时间内或当 $t \to \infty$ 时，$x(t) \to \infty$.

6.8. 例 问题： 如果 $x(t)$ 为 $\ddot{x} + g(x, \dot{x}) = 0$ 的解 (其中 $g(x, 0) < 0$ 对 $x > 0$ 成立) 满足 $x(0) > 0$, $\dot{x}(0) > 0$, 则在有限时间内或当 $t \to \infty$ 时，$x^2(t) + \dot{x}^2(t) \to \infty$.

解： 等价系统为 $\dot{x} = y, \dot{y} = -g(x, y)$. 取 $V = -x$, $G = \overline{R_+^2}$ 再利用上面的推论 ([65] 关于这个方程有详细的讨论，而这个不稳定性结果不包括在其中).

再进一步考查这个例子，因为它暗示了下一章的定理 7.12. 原方程也可以写成

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) + g(x) = 0,$$

$g(x) = g(x, 0)$ 而 $f(x, \dot{x}) = g(x, \dot{x}) - g(x, 0)$. $g(x)$ 为守恒力，$f(x, \dot{x})$ 为阻尼. 与此等价的系统是 $\dot{x} = y, \dot{y} = -g(x) - f(x, y)$. 总能量为 $W = \frac{1}{2}y^2 + G(x)$, 其中 $G(x) = \int_0^x g(s)ds$ 而 $\dot{W} = -yf(x, y)$. 如上情形对应 $g(x) < 0$ $(x > 0)$ ($x > 0$ 时为推斥力).

假设 $y \neq 0$ 时，$yf(x, y) > 0$(正阻尼), 而 $xg(x) < 0$ $(x \neq 0)$, 则 W 为 R^2 上的 Liapunov 函数. 区域 G 由 $W < 0$ 所定义，它是正不变和非空的. 这样 $M = M^*$ 为原点. 因为 G 中的解都不趋于原点，由上面的推论知，每个这样的解在有限时间或当 $t \to \infty$ 时趋于 ∞. 阻尼不能使这个系统稳定.

7. 稳定与不稳定性

我们只讨论集合 H 在 G^* 中的稳定性，G^* 在 R^n 中为紧. 这样，集合 $B_\delta(H) = \{x; \rho(x, H) < \delta\}$ 生成了 H 的一个完备邻域系 (δ 充分小时，$B_\delta(H) \subset G^*$).

7.1. 定义 紧集 $H \subset G^*$ 称为是稳定的，如果给定 H 的邻域 U, 存在 H 的邻域 W 使得 $x \in W$ 蕴含 $\pi(t, x) \in U$ $(t \geq 0)$.

7.2. 练习 证明： 如果紧集 H 稳定，则为正不变且对每个 $x \in H$, $\omega(x) = \infty$. 特别地，点 $x \in G^*$ 稳定，则为一平衡点.

7.3. 记号 关于 G^* 中集合 H 定义 $\hat{H}$ 如下： $z \in \hat{H}$, 如果存在序列 $x^n \in G^*$ 和 $t_n \in [0, \omega(x^n))$ 使得当 $n \to \infty$ 时，$\pi(t_n, x^n) \to z$. $\hat{H}$ 称为 H 的正延拓 (参阅 [9],[10]).

注: $H \subset \hat{H}$. 在附录 A 的图 2 中, 解旋转离开平衡点. 平衡点的正延拓由平行直线 $y = 0$ 和 $y = 1$ 所界定的闭区域. 它是弱不变的, 但不是不变的.

7.4. 练习 证明:

(a) 设 H 为 G^* 中的紧正不变集, 则 H 稳定当且仅当 $\hat{H} = H$.

(b) 设 H 为 G^* 中的紧不变集, 则 $\hat{H}$ 弱不变.

7.5. 定义 紧集合 $H \subset G^*$ 称为吸引子, 如果存在 H 的邻域 U 使得 $x \in U$, 且 $t \to \infty$ 时, $\pi(t,x) \to H$. 如果对每个 $x \in G^*$, $\pi(t,x) \to H$, 则 H 称为整体吸引子. 如果 H 既是稳定的, 又是吸引子. 则 H 称为是渐近稳定的. H 称为是整体渐近稳定的, 如果它既是稳定的, 又是整体吸引子.

7.6. 定义 不是稳定的称为是不稳定的. 如果 H 既不稳定又不是吸引子, 则 H 称为是强不稳定的.

7.7. 练习 集合 H 在 G^* 中的吸引区域 $\mathcal{R}(H)$ 为满足 $\pi(t,x) \to H$ $(t \to \infty)$ 的所有 $x \in G^*$ 构成. H 的边界和补集分别表示为 ∂H 和 ϕH. 如果紧集 $H \in G^*$ 渐近稳定, 证明:

(a)$\mathcal{R}(H)$ 为开,

(b) $\mathcal{R}(H)$, $\partial\mathcal{R}(H)$ 和 $\phi\mathcal{R}(H)$ 均为弱不变.

下面的结果非常有用, 它是练习 7.4 和不变性原理的直接结果.

7.8. 定理 设 G 为 G^* 中有界正不变开集使得 G 上的每个解有界且正极限点都不在 G 的边界上. 如果 (i) V 为 G 上 (2.1) 的 Liapunov 函数, (ii) $M^0 = \overline{M \bigcap G} \subset G$, (iii)$M^0$ 紧, 则 M^0 为吸引子且 $G \subset \mathcal{R}(M^0)$. 如果进一步有 (iv) V 在 M^0 的边界上为常数, 则 M^0 渐近稳定.

7.9. 注 与此结果类似但稍稍特殊一点的结论由 [58] 给出 (推论 1 和定理 3). 在其推论 1 的证明中有一错误. 因为 $\dot{V}(x)$ 不一定连续, E 和 M

可能非闭. [58] 中推论 1 和定理 3 当 M 换为 $\overline{M}$ 时为真. 如果假设 V 为 C^1, 则 M 闭. 这样, $\overline{M\bigcap G}\subset G$ 与 $M\bigcap G$ 闭等价. 这里我们允许 M 的点位于 G 的边界. 下一个例子正好说明了以上的细节.

7.10. 例 $\ddot{x}+a\dot{x}+2bx+3x^2=0$, $a>0$, $b>0$. 等价的系统为 $\dot{x}=y, \dot{y}=-2bx-ay-3x^2$. 平衡点为 $(0,0)$ 和 $(-\frac{2}{3}b,0)$. 取 $V=\frac{1}{2}y^2+bx^2+x^3$, 此为系统的总能量. 则 $\dot{V}=-ay^2$, V 为 R^2 上的 Liapunov 函数, E 为 x 轴而 M 为此二平衡点. 区域 $V<\frac{4}{27}b^3$ 为两个子区域 G_1 和 G_2 之并. 记 G_1 为包含原点 $(-\frac{2}{3}b,0)$ 之右端) 的有界子区域, G_2 为 $(-\frac{2}{3}b,0)$ 左端的无界子区域. G_1 和 G_2 均为正不变, 而从 G_1 或 G_2 中出发的解均不趋于 $(-\frac{2}{3}b,0)$. 关于 G_1, 定理 7.8 的条件满足, 因为 M_1 为原点, 所以原点渐近稳定. 当 $a>0$ 时, G_1 度量了稳定区域的大小, G_1 为原点的吸引区域. 对 G_2, M_2 为不稳定平衡点 $(-\frac{2}{3}b,0)$. 所有 G_2 中出发的解均不趋于 $(-\frac{2}{3}b,0)$, M_2 中的解在有限时间内或 $t\to\infty$ 时趋于无穷.

7.11. 练习 考虑方程

$$\frac{d^3y}{dt^3}+b_1\frac{d^2y}{dt^2}+(1+b_2)\frac{dy}{dt}+b_1y+\frac{d}{dt}(y^3)=0,$$

$b_1>0, b_2>0$. 证明此方程等价于系统

$$\dot{x}=A(x)x,$$

其中

$$A(x)=\begin{pmatrix} -b_1 & 1 & 0 \\ -x_1^2-b_2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

且说明原点为整体渐近稳定. (此方程由 Singh[100]) 作为直观方法的反例给出, 此方法即工程师们称为的 “调和线性化”, 用于逼近, 计算和建立几乎非线性系统周期解的存在性.)

我们将陈述一个不稳定性定理，它推广了 $\hat{C}$etaev 的不稳定性定理. 证明可由定理 6.4 直接得到. 定理的陈述有些复杂，它包含了如下的可能：平衡点在 U 的边界或内部.

7.12. 定理 $y \in G^*$ 为 (2.1) 的平衡点且包含在开集 $U \subset G^*$ 的闭包中. N 为 y 的邻域. 假设：(i) V 为 (2.1) 在 $G = U \bigcap N$ 上的 Liapunov 函数，$M \bigcap G$ 或者空，或者为 y, (ii) $V(y) = 0$, 且 $V(x) = 0$ 在 G 的边界上位于 N 的内部成立，(iii) $V(x) < 0, x \in G, x \neq y$, 则 y 不稳定. 事实上，如果 $N_0 \subset G^*$ 为真包含在 N 中 y 的任意邻域，则每一个从 $G_0 = N_0 \bigcap G$ 中非 y 点出发的解一定离开 N_0. 如果 U 正不变，则在 $U - \{y\}$ 中出发的解，当 $t \to \infty$ 时均不趋于 y, 即 y 强不稳定.

7.13. 例 考虑

$$\dot{x} = xy + xy^2 + \ldots,$$
$$\dot{y} = -y + x^2 + \ldots,$$

其中点表示省略了的高次项. 在线性近似情形，原点是稳定的，但是我们将看到非线性产生的不稳定. 取 $V = y^2 - x^2$, 则 $\dot{V} = -2y^2(1 + x^2) + \ldots$. 记 U 为 $V < 0$ 的区域而 N 为原点的充分小邻域，则定理 7.12 的条件满足，即原点不稳定. 如果没有高次项，则可推出：每一个从 $V < 0$ 出发的解在有限时间内或当 $t \to \infty$ 时趋于无穷.

8. 向量 Liapunov 函数

正如第一章的第八节一样，通常的向量 Liapunov 函数没有什么新东西 (参阅 [60]). 因此，我们考虑向量 Liapunov 函数更一般的概念，这是由 Arrow, Block 和 Hurwicz 利用 Liapunov 函数 (他们没有这样称) 所提出的.

8.1. 记号

$w : G^* \to \in R^m$,

$W(x)=\max_i w_i(x),,$

$J(x)=\{j;w_j(x)=W(x)\},$

$u^\tau=(1,1,...,1),$

$\overset{o}{w}(x)=\lim_{t\to 0^+}\inf\frac{1}{t}(w(\pi(t,x))-W(x)u).$

注意，如果 w 连续，

$$\overset{o}{w}_j(x)=\begin{cases}-\infty, & j\notin J(x),\\ \\ \dot{w}_j(x) & j\in J(x).\end{cases}$$

8.2. 定义　w 为 (2.1) 在 G 上的向量函数，如果 (i) w 在 G^* 上为 C^1, (ii) $\overset{o}{w}(x)\le 0$ 对所有 $x\in G$ 成立.

记 $E=\{x;\overset{o}{w}(x)\not<0, x\in\bar{G}\bigcap G^*\}$; M 为 E 中的最大不变集.

8.3. 引理

(i) $|W(y)-W(x)|\le max_i|w_i(y)-w_i(x)|$.

(ii) 如果 w 在 $x^0\in G^*$ 连续，则 W 也连续.

(iii) 如果 w 在 G^* 上连续，则任给 $x\in G^*$, 存在 x 的邻域 $N(x)$ 使得 $y\in N(x)$ 蕴含 $J(y)\subset J(x)$.

(iv) 如果 w 在 G^* 上连续，则对 y 充分接近 x,

$$W(y)-W(x)=\max_{i\in J(x)}(w_i(y)-w_i(x)).$$

(v) 如果 w 在 G^* 上为 C^1, 则

$$\dot{W}(x)=\max_{i\in J(x)}\dot{w}_i(x)=\max_i\overset{o}{w}_i(x).$$

证明：

(i) 显然 $W(y)-W(x)=\max_i[w_i(y)-W(x)]\le\max_i[w_i(y)-w_i(x)]\le\max_i|w_i(y)-w_i(x)|$. 交换 x 和 y 得 (i).

(ii) 此为 (i) 的直接结果.

(iii) 由连续性易得.

(iv) 对 y 充分接近 x 有 $J(y) \subset J(x)$. 这样,

$$W(y) - W(x) = \max_{i \in J(y)}[w_i(y)] - W(x)$$

$$= \max_{i \in J(x)}[w_i(y) - W(x)]$$

$$= \max_{i \in J(x)}[w_i(y) - w_i(x)]$$

(v) 记 $\phi_i(t) = \frac{1}{t}(w_i((t,x)) - w_i(x))$ 其中 $\phi_i(0) = \dot{w}_i(x)$. 因为每个 $w_i(x)$ 为 C^1, 所以每个 $\phi(t)$ 在 $t = 0$ 连续. 由 (iv) 我们有

$$\dot{W}(x) = \lim_{t \to 0^+} \inf \max_{i \in J(x)} \phi_i(t).$$

则由 (ii) 可得 $\dot{W}(x) = \max_{i \in J(x)} \dot{w}_i(x)$.

由如上引理中的 (v), 我们知道, 如果 w 为 G 上的向量 Liapunov 函数, 则 $W(x)$ 为 G 上的纯量 Liapunov 函数. 从而, 我们有如下的

8.4. 定理 如果 (i) w 为 (2.1) 在 G 上的向量 Liapunov 函数, (ii) $\pi(t, x)$ 准紧且对所有 $t \geq 0$ 属于 G, 则当 $t \to \infty$ 时, 存在 c, 使 $\pi(t, x) \to M \bigcap W^{-1}(c)$.

与第一章中差分方程 (10.2) 的讨论类似, 我们将 (2.1) 写成如下形式 $(f(x) = A(x)x)$

$$\dot{x} = A(x)x \tag{8.1}$$

其中 $A(x)$ 为 $n \times n$ 矩阵函数.

8.5. 记号 记 $B = (b_{ij})$ 为一 $n \times n$ 矩阵. 定义 $\hat{B} = (\hat{b}_{ij})$ 其中 $\hat{b}_{ii} = b_{ii}$, $\hat{b}_{ij} = |b_{ij}|$ $(i \neq j)$.

我们将建立和说明一个结果, 它推广了经济学家熟知的整体渐近稳定的条件并且使其精确化 (例如, 参阅 [5]). 他们的条件是由 $f(x)$ 的 Jacobian 矩阵 $f'(x)$ 给出的. 我们将给出例子引出如下的结果 (比较第一章定理 10.7).

8.6. 定理　假设 G 为满足 $\overline{G}\subset G^*$ 的开集且相对于 (8.1) 正不变. 又假设存在向量 $c>0$ 使得对每个 $x\in G$, $x\neq 0$, $\hat{A}(x)c<0$ 成立. E_0 为 G 边界上使得 $\hat{A}(x)c$ 不小于 0 的集合. M_0 为 E_0 中的最大不变集, 则 (8.1) 的每个始于 $\overline{G}$ 的解当 $t\to\infty$ 时趋于 $\{0\}\bigcup M_0$.

(i) 如果 $\{0\}\bigcup M_0=\{0\}$, 则 0 相对于 $\overline{G}$ 整体渐近稳定.

(ii) 如果 $0\in G$, 则 $\overline{G}$ 中出发的每个解趋于 0 或 M_0. 从而, 如果 G 中的解不趋于 M_0, 则 0 相对于 G 整体渐近稳定.

证明:　取 $w_i(x)=x_i^2/c_i^2$. 取定 $x\in G$, $x\neq 0$, 设 $w_j(x)\geq w_i(x)$, $i=1,...,n$. 通过简单的计算可得

$$\dot{w}_j(x)\leq\frac{2|x_j|^2}{c_j}(\hat{A}(x)c)_j<0.$$

因此 $w(x)$ 为 G(或 $\overline{G}$) 上的 Liapunov 函数. 如果 $0\in G$, 则 $M=M_0\bigcup\{0\}$, 如果 $0\notin G$, 则 $M=M_0$. 因为当 $\|x\|\to\infty$ 时, $W(x)\to\infty$, $\overline{G}$ 中出发的解均有界. 从而由定理 8.4, 每个从 G 中出发的解当 $t\to\infty$ 时趋于 $M_0\bigcup\{0\}$. 在情形 (i) 和 (ii), 原点相对于 G 为整体吸引子. 相对于 G 的稳定性论证与定理 7.8 类似.

下面的结论说明如何利用向量 Liapunov 函数建立不稳定性.

8.7. 定理　设 N 和 N_1 为原点的邻域且 $N\subset N_1$. 如果 (i) $\hat{A}(x)=A(x)$ 对所有 $x\in G=N\bigcap R_+^n$ 成立, (ii) 存在 c 使 $A(x)c>0$ 对所有 $x\in G$ 成立, 则 (8.1) 的原点不稳定. 如果还有 (iii) $G_1=N_1\bigcap R_+^n$ 正不变, 则 G_1 中出发的解当 $t\to\infty$ 时均不趋于原点, 故原点强不稳定.

证明:　取 $w_i(x)=x_i/c_i$ 且定义 $W(x)=\min_i w_i(x)$. 如果对于 $x\in G$, $w_j(x)\leq w_i(x)$ 关于 $i=1,...,n$ 成立, 则由 (i) 和 (ii) 可得 $\dot{w}_j(x)\geq(A(x)c)_j>0$. 由引理 8.3 之 (iv)(将 max 换为 min), 我们知道 $\dot{W}>0$ 对所有 $x\in G$ 成立. 不稳定性由定理 7.12 作代换 $V=-W$ 得出.

8.8. 注　将 (8.1) 换为如下的方程, 定理 8.6 和定理 8.7 仍然成立

$$\dot{x}=D(x)A(x)x,\tag{8.2}$$

其中 $D(x)$ 对每个 $x \in G, x \neq 0$ 为正对角矩阵.

8.9. 练习 A 为 $n \times n$ 常数矩阵. $\hat{A} = A$ 表示 A 的非对角元素均为非负. 经济学家将此类矩阵称为 $M-$ 矩阵 (关于这类矩阵的完整讨论, 参阅 [28]). 证明:

(a) $\overline{R^n_+}$ 正不变 (即 $t \geq 0$ 时, $e^{At} \geq 0$) 当且仅当 $\hat{A} = A$.

(b) 假如有向量 $c > 0$ 使得 $\hat{A}c < 0$, 则 A 稳定. (即当 $t \to \infty$ 时, $e^{At} \to 0$).

(c) 如果 $\hat{A} = A$ 且存在向量 $c > 0$ 使得 $Ac \geq 0$, 则 A 不稳定. 如果 $Ac > 0$, 则 $\dot{x} = Ax$ 在 R^n_+ 中的每个解当 $t \to \infty$ 时趋于无穷大.

(d) 如果 $\hat{A} = A$, 则如下的结果等价:

(i) A 稳定,

(ii) $A^{-1} \geq 0$,

(iii) 存在 $c > 0$, 使得 $Ac < 0$,

(iv) 对每个 $c > 0$, 存在 i 使得 $(Ac)_i < 0$,

(v) 存在正对角阵 D 使得 $DA + A^{\tau} D$ 负定.

下一个例子是第一章例 10.8 的连续形式.

8.10. 例 考虑 (8.2), 其中

$$D(x) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}, \quad A(x) = \begin{pmatrix} -\gamma_1 & 1 - x_1 \\ 1 - x_2 & -\gamma_2 \end{pmatrix};$$

即

$$\dot{x}_1 = \alpha_1(-\gamma_1 x_1 + (1 - x_1)x_2),$$

$$\dot{x}_2 = \alpha_2((1 - x_2)x_1 - \gamma_2 x_2),$$

这种类型的方程及其高维推广可以作为传染病模型和捕食 (寄生) 模型. 我们所得到的结果不是新的, 当 $n = 2$ 时可由各种方法得到. 然而, 这里所用的方法不依赖于平面上的单一拓扑, 还可以推广到高维情形. 对于我们考虑的传染病模型, α_i 和 γ_i 为正; x_i 为第 i 个群体被感染的比例, 而

$(1-x_i)$ 表示易感群体的比例 (不考虑免疫性); α_i 为常系数, $\alpha_i\gamma_i$ 为康复系数. 现在, 定理 8.6 中的 G 为 $G=\{x; 0<x_i<1, i=1,2\}$ 且 G 和 $\bar{G}$ 均为正不变. 注意到对 $x\in G$ 有 $\hat{A}(x)=A$. 因为

$$A(x)\begin{pmatrix} 1+\gamma_2 \\ 1+\gamma_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\gamma_1\gamma_2-(1+\gamma_1)x_1 \\ 1-\gamma_1\gamma_2-(1+\gamma_2)x_2 \end{pmatrix},$$

定理 8.6 中的条件当 $\gamma_1\gamma_2\geq 1$ 时满足. 最坏情况 ($\gamma_1\gamma_2=1$ 时), E_0 为坐标轴与 $\overline{G}$ 之交, 这时 $M_0=\{0\}$. 因此, 当 $\gamma_1\gamma_2\geq 1$ 时, 原点相对于 $\overline{G}$ 整体渐近稳定. 事实上, 因为 (参阅定理 8.6 之证明)$w_1(x)=x_1^2/(1+\gamma_2)^2$ 和 $w_2(x)=x_2^2/(1+\gamma_1)^2$, $\max(x_1/(1+\gamma_2), x_2/(1+\gamma_1))$ 总是单减的, 康复比较传染快很多, 传染病趋于消亡.

如果 $\gamma_1\gamma_2<1$, 则在 G 中的原点附近有

$$A(x)(\frac{1+\gamma_2}{1+\gamma_1})>0.$$

从而, 由定理 8.7, 原点不稳定且 G 中出发的解当 $t\to\infty$ 时均不趋于原点. (事实上, 容易证明 $\overline{G}-\{0\}$ 中出发的每个解的正极限集属于 G. 后面我们将看到这一点). G 中的平衡点为 $x_1^0=(1-\gamma_1\gamma_2)/(1+\gamma_1)$, $x_2^0=(1-\gamma_1\gamma_2)/(1+\gamma_2)$, 取 $u_1=x_1-x_1^0$, $u_2=x_2-x_2^0$, 则在新坐标系中有

$$\dot{u}=DB(x)u, \tag{8.3}$$

其中

$$B(x)=\begin{pmatrix} -\rho & 1-x_1 \\ 1-x_2 & -\rho^{-1} \end{pmatrix}$$

而 $\rho=(1+\gamma_1)/(1+\gamma_2)$. 因为 $x\in G$ 时, $\hat{B}(x)=B(x)$ 且

$$B(x)\begin{pmatrix} 1+\gamma_2 \\ 1+\gamma_1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} (1+\gamma_1)x_1 \\ (1+\gamma_2)x_2 \end{pmatrix},$$

(8.3) 满足定理 8.6 的条件. 容易看出, M_0 为 $u=-x^0$ $(x=0)$. 因为 G 中出发的解不趋于 $u=-x^0$, 平衡点 $u=0$ $(x=x^0)$ 相对于 G 整体渐近稳定.

实际上, $G-\{0\}$ 中出发的每个解进入 G, 因此当 $t\to\infty$ 时趋于 $x=x^0$. 当 $\gamma_1\gamma_2<1$, $t\to\infty$ 时, 系统趋于一个稳定的传染病感染程度. 这时 $\max\{|x_1-x_1^0|/(1+\gamma_2),|x_2-x_2^0|/(1+\gamma_1)\}$ 总是递减的. 这样, 与离散模型不同 (第一章例 10.8), 我们得到了完整的解答. 在离散模型中, 不是对所有的 $\gamma_1\gamma_2<1$, 我们都能得到 x^0 的整体渐近稳定性.

第三章

泛函微分方程 • 局部半动力系统

1. 引言

微分差分方程的研究历史与常微分方程一样长，但只是在 60 年代初期前后，研究常微分方程十分成功的几何方法才被前者采纳. 这种几何观点被 Krasovskii 在 [50] 中用于发展时滞方程 Liapunov 第二或直接方法. 这些方程在函数空间中定义了流 (局部半动力系统)，理解这一点对于发展与微分方程现代理论相应的微分差分方程理论有极大的促进. 这使得 Krasovskii 能够将 Liapunov 经典理论推广到泛函微分方程. 也使 Hale 在 1963 年 [36](同时参阅 [37],[40]) 将不变性理论推广到了这一类系统. Liapunov 直接法的推广包含了但远不止泛函微分方程. 其程度超过了常微分方程的发展. 我们的讨论将在局部半动力系统的较大框架下进行. 我们仅考虑自治滞后型泛函微分方程，这方面的应用是广泛的 (参阅本章最后指出的参考文献).

滞后型泛函微分方程包括，微分差分方程

$$\dot{x}(t)=f(x(t),x(t-1)),\tag{1.1}$$

以及积分微分方程

$$\dot{x}(t)=\int_{t-1}^{t}f(x(s),s)ds.$$

在如上的例子中，系统在时刻 t 的状态依赖于过去的一段时间状态 (遗传系统). 这类方程出现在众多应用之中. [40] 对一般的理论有很好的介绍.

2. 自治滞后型泛函微分方程

2.1. 记号

$x:[-r,a)\to R^n$, r, a 为正.

$C=C([-r,0],R^n)$ 为连续函数 $\phi:[-r,0]\to R^n$ 所组成的空间. C 为 Banach 空间, 范数为 $||\phi||=\max_{t\in[-r,0]}||\phi(t)||$, C 中的收敛即 $[-r,0]$ 上的一致收敛.

函数 $x_t;[-r,0]\to R^n$ 由 $x_t(0)=x(t+0)$ 定义, $-r\le 0$ 且 $0\le t<a$; x_t 为 t 时刻 $x(t)$ 的过去的一个时间状态.

$f:X\subset C\to R^n$, 其中 X 为 C 中开集而 f 连续, 除特别声明, 拓扑都是相对 C 的.

自治滞后型微分方程为

$$\dot{x}(t)=f(x_t), \tag{2.1}$$

2.2. 定义 函数 $x:[-r,a)\to R^n$ 称为 (2.1) 的解, 如果 $a>0$ 使 x 对所有 $x\in[0,a)$ 满足 (2.1). $x(t)$ 称为如下初值问题的解

$$\dot{x}(t)=f(x_t),\quad x_0=\phi, \tag{2.2}$$

如果 $x(t)$ 为 (2.1) 在 $[-r,a)$ $(a>0)$ 上的解且 $x(t)=\phi(t)$ 在 $-r\le t\le 0$ 上对 $\phi\in X$ 成立. 我们仅考虑连续初值情形.

我们总假设初值问题 (2.2) 定义在 $t\in[-r,\omega(\phi))$, $\omega(\phi)>0$ 上的解唯一, $[-r,\omega(\phi))$ 为解的最大存在区间. 并且始终假设 f 映 X 中的有界集到 C 中的有界集. 这只需要 f 在 X 上 Lipschitz 连续即可. 存在唯一性定理和连续依赖性定理与常微分方程是相同的 (参阅 [40]), 如差分方程一样, 存在唯一性只是关于正时间方向的.

3. 由 (2.1) 定义的流

设 $x(t)$ 为 (2.2) 的唯一解, 记 $I(\phi)=[0,\omega(\phi))$, 定义 $\chi=\{(t,\phi);t\in I(\phi),\phi\in X\}\subset R_+\times X$. 映射 $\pi:\chi\to X$ 由 $\pi(t,\phi)=x_t$ 定义; $\pi(t,\phi)$ 为

(2.1) 解定义的 X 上的运动或流，注意， $\pi(t,\phi)$ 可以在 X 的边界有正极限点.

(2.1) 解的基本性质 (参阅 [40]) 可以通过 π 总结如下：

P_1. 或者 $I(\phi)=[0,\infty)$ 或者 $\Omega(\psi)\bigcap X$ 空.

P_2. $\pi(0,\phi)=\phi$.

P_3. $s,t\in R_+=[0,\infty), s+t\in I(\phi)$ 蕴含 $s\in I(\pi(t,\phi))$ 且 $\pi(s,\pi(t,\phi))=\pi(s+t,\phi)$.

P_4. $I(\phi)$ 下半连续， π 连续，即，如果 $\phi\in X$ 且 $t\in I(\phi)$, 则 $(t_n,\phi_n)\to(t,\phi)$ 蕴含 $t\in I(\phi_n)$ 对充分大 n 成立，且当 $n\to\infty$ 时，$\pi(t_n,\phi_n)=\pi(t,\phi)$.

具有如上性质的映射 π 称为局部半动力系统 (参阅 [13]). “局部” 是因为解是局部存在的，而 “半” 是因为解只对正 t 有意义. P_1 表示 $I(\phi)$ 的最大性， P_3 为半群性质，与时间向前解的唯一性等价 (练习 3.2), 而 P_4 是关于初值的连续依赖性.

3.1. 练习 证明： (a) $\omega(\phi)=t+\omega(\pi(t,\phi))$ 关于所有 $t\in I(\phi)$ 成立, (b) 如果 $t\in I(\phi)\bigcap I(\psi)$, $\pi(t,\phi)=\pi(t,\psi)$, 则 $I(\phi)=I(\psi)$ 且 $\pi(t+s,\phi)=\pi(t+s,\psi)$ 当 $s\geq 0$ 且 $t+s\in I(\phi)$ 时成立.

4. 不变性

4.1. 定义 称集合 $H\subset X$ 关于 (2.1) 不变，如果对每个 $\phi\in H$, $I(\phi)=[0,\infty)$ 且 $\pi(t,H)=H$ 对所有 $t\geq 0$ 成立.

4.2. 练习 设 $I(\phi)=[0,\infty)$. 由 $(-\infty,\infty)$ 到 X 的函数 $\pi^*(\bullet,\phi)$ 称为 $\pi(t,\phi)$ 的延拓，如果 (i) $\pi^*(0,\phi)=\phi$, (ii) $\pi(s,\pi^*(t,\phi))=\pi^*(t+s,\phi)$ 对所有 $s\in[0,\infty)$ 和所有 $t\in(-\infty,\infty)$ 成立. $x^*(t)=x^*(t,\phi)(0)$ 称为解 $x(t)=\pi(t,\phi)(0)$ 的延拓. 利用选择公理证明： H 不变当且仅当对每个 $\phi\in H$, $I(\phi)=[0,\infty)$ 且 $\pi(t,\phi)$ 存在对所有 t 包含在 H 中的延拓 $\pi^*(t,\phi)$.

4.3. 定义 假设 $x(t)$ 为 (2.1) 满足 $x_0 = \phi$ 的解，定义 $\gamma^+(\phi) = \pi(I(\phi), \phi) = \{x_t; t \in I(\phi)\}$，称为从 ϕ 出发的正轨线. 解 $x(t)$ 称为是准紧的，如果 $\gamma^+(\phi)$ 紧且 $\overline{\gamma^+(\phi)} \subset X$ (即 $\gamma^+(\phi)$ 相对于 X 准紧，这等价于 $\gamma^+(\phi)$ 相对于 C 准紧且 $\Omega(\phi) \subset X$). 注意，如果 $x(t)$ 准紧，则 $I(\phi) = [0, \infty)$.

如前，容易得到下面的定理.

4.4. 定理 如果 $x(t)$ 是 (2.1) 的一个准紧的解，则其正极限集 $\Omega(\phi)$ 包含在 X 中，且非空，紧，不变，连通，而当 $t \to \infty$ 时，$x_t \to \Omega(\phi)$.

4.5. 记号 $V : X \to R$, 关于 (2.1)

$$\dot{V} = \lim_{t \to 0^+} \inf \frac{1}{t}[V(\pi(t, \phi)) - V(\phi)].$$

4.6. 定义 G 为 X 的子集. V 称为 (2.1) 在 G 上的 Liapunov 函数，如果 (i) V 在 X (或 $\overline{G}$) 上连续，(ii) $\dot{V}(\phi) \leq 0$ 对所有 $\phi \in G$ 成立.

如果 V 为 Liapunov 函数，则 $E = \{\phi; \dot{V} = 0, \phi \in \overline{G}\}$, 而 M 为 E 中的最大不变集. 则与前面几章一样，我们可以得到推广的 Liapunov 直接法以及所有对应的稳定与不稳定性定理. 这里，我们写下几个主要的.

4.7. 定理 假设 V 为 (2.1) 在 G 上的 Liapunov 函数，$x(t)$ 为 (2.1) 的解，准紧且对所有的 $t \geq 0$, x_t 属于 G, 则存在 c, 使得 $x_t \to M \bigcap V^{-1}(c)$.

就结果都是平行的这一点来说固然很好，但当状态空间 X 非局部紧时，推广的不变性原理在应用上还有困难 (例如，参看 [38]). 一个实际的问题是：给定系统 (2.1), 如何判断其解的准紧性？解的有界性可以直接从微分方程 (2.1) 利用 Liapunpov 函数来确定，而对于滞后型泛函微分方程答案由下面的引理给出 (我们总是假设 f 映有界集到有界集).

4.8. 引理 $x(t)$ 为 (2.1) 的有界解. 假如 x_t 的正极限点均不在 X 的边界上，则 $x(t)$ 准紧.

证明:　设 K 为 $t\in I(\phi)$ 时 $\|f(x_t)\|$ 的上界, $\gamma^+(\phi)=\{x_t;t\in I(\phi)\}$. 如果 $t,t+\theta\in I(\phi)=[0,\omega(\phi))$, 则

$$\|x(t+\theta)-x(t)\|=\|\int_t^{t+\theta}f(x_s)ds\|\le K|\theta|,$$

$x(t)$ 在 $[0,\omega(\phi))$ 上一致连续. 因为对任给 $0<a<\omega(\phi)$, $x(t)$ 在 $[-r,a)$ 上一致连续, 所以 $x(t)$ 在 $[-r,\omega(\phi))$ 上一致连续. 因此函数族 $\gamma^+(\phi)$ 在 $[-r,0]$ 上等度连续, 且 $\gamma^+(\phi)$ 在 C 中准紧; 因为, $\overline{\gamma^+(\phi)}\subset X$, $x(t)$ 准紧.

我们现在举一个简单的例子来说明如何应用如上推广的 Liapunov 直接方法. 此方法在 [40] 中讨论过, 但我们要给出更多的关于解的渐进稳定的结论.

4.9. 例　考虑微分差分方程

$$\dot{x}(t)=ax^3(t)+bx^3(t-r),\quad r>0.$$

注意, 当 $r=0$ 时, 如果 $a+b<0$, 我们有整体渐进稳定性, 如果 $a+b>0$, 则除原点之外的所有解无界.

取

$$V(\phi)=-\frac{1}{2a}\phi^4(0)+\int_{-r}^0\phi^6(\theta)d\theta.$$

由 $V(x_t)=-\frac{1}{2a}x^4(t)+\int_{t-r}^t x^6(s)ds$ 可得

$$\dot{V}(\phi)=-(\phi^6(0)+\frac{2b}{a}\phi^3(0)\phi^3(-r)+\phi^6(-r)).$$

从而, 如果 $|b|\le|a|$, 则 V 为 C 上的 Liapunov 函数. 如果 $a<0$, 则 V 正定. 当 $\|\phi\|\to\infty$ 时, $V\to\infty$, 且每个解有界从而准紧.

情形 1.　$a<0$ 且 $|b|<|a|$. E 为 $[-r,0]$ 上满足 $\phi(0)=\phi(-r)=0$ 的连续函数 ϕ 之集, 而 $M=\{0\}$, 即 $[-r,0]$ 上的零函数 (C 中的零点). 故原点整体渐进稳定.

情形 2.　$a<0$ 且 $b=a$. 集合 E 由满足 $\phi(0)=-\phi(-r)$ 的函数组成. 如果解流仍然属于 E, 则 $\dot{x}(t)=0$. 从而, M 对应于常函数 $\phi=c$, 由 $c=0$ 和 $M=\{0\}$. 原点仍然整体渐进稳定.

情形 3.　$a < 0$ 且 $b = -a$. 这时, E 对应 $\phi(0) = \phi(-r)$, 而 M 对应于 $\phi = c_0$(每一个常函数为一平衡点). M 与 $V^{-1}(c)$ 之交为有限个常函数, 因为 Ω 连通, 每个运动 x_t 趋于一个常函数.

情形 4.　$a > 0$ 且 $|b| < |a|$(或 $b = a$). 集合 $G = \{\phi; V(\phi) < 0\}$ 非空且正不变, 而 M 为原点. G 中出发的运动 x_t 均不趋于 M(M 位于 G 之边界). 因此 G 中出发的每个解均无界. 事实上, 可以证明 G 中的每个解 $x(t)$ 在有限时间内或 $t \to \infty$ 时趋于无穷.

一些依赖于 r 的更细致的结果需要更精巧的 Liapunov 函数, 关于其它例子可参阅, 例如 [40].

如今, 不变性原理已经推广到中立型泛函微分方程, 积分方程, 及某些偏微分方程和发展方程, 这些都超出了本讲义. (关于这方面的推广和应用, 参阅 [16]-[18], [22], [24], [25], [38], [41], [44], [59], [76]-[80], [89], [97], [98], [101]-[104], [107]-[109]).

第四章

抽象离散动力系统和过程 • 非自治差分方程

1. 引言

本章有两个目的. 首先发展非自治差分方程的不变性原理. 这里, 我们将根据 Miller, Sell, Dafermos 和 Artstein 的工作, 并且使用他们的方法和术语 (参阅附录 A 关于这些进展的历史记注). 读者也可以直接进入附录 A, 那里的讨论更丰富和详细. 然而, 本章我们将揭示差分方程和微分方程的差异. 而这里所涉及的整个理论是相当基本的. 同时, 这里的观点与附录 A 中的也略有不同.

第二个目的是为了说明, 本质上其理论非常简单, 状态空间的结构所涉及的概念只是收敛. 这种结构甚至是非拓扑的. 我们的讨论仅仅限于那些为得到非自治系统 (过程) 解 (运动) 的不变性所必须的内容. 关于具有拓扑结构的状态空间的抽象连续动力系统, 参阅 [13]. 近期的进展, 如 Sell[97] 及 Miller 和 Sell[77]-[80] 的结果, 给拓扑动力学注入了新的内容. 本章和附录 A 表明有理由考虑 "非拓扑" 的动力学. 因为大部分的证明与第一章中的相同, 这里只给出一个理论框架.

2. 离散动力系统 • 自治差分方程

2.1. 定义 集合 P 称为是 Fréchet(或收敛) 空间, 如果 P 中每个序列 p_n 或者有属于 P 的极限 p 或者没有极限. 假如 p_n 有极限, 记为: $n \to \infty$ 时, $p_n \to p$(或简记为 $p_n \to p$). 这种收敛有如下性质:

(i) $p_n \to p$ 及 $p_n \to q$ 蕴含 $p = q$;

(ii) $p_n = p, n = 1, 2, \ldots$ 蕴含 $p_n \to p$;

(iii) 对每个 p_n 的子列 p_{n_i}, $p_n \to p$ 蕴含 $p_{n_i} \to p$.

这些在 Fréchet 的学位论文中作为 (L) 类空间研究过 (参阅 [51], 第 21 章).

连续性，紧性，闭包等等都是按收敛在通常意义下定义的．这些都是序列概念．例如，$K \subset P$ 紧，如果 K 中每个序列收敛且极限属于 K．紧集合总是闭的． H 为准紧，如果它包含在一个紧集中．一个准紧集为紧当且仅当它是闭的．

2.2. 定义 P 为 Fréchet 空间．映射 π: $J_+ \times P \to P$ 称为离散动力系统，如果

D_1: $\pi(0,p) = p$ 对所有 $p \in P$ 成立．

D_2: $\pi(n, \pi(k,p)) = \pi(n+k,p)$ 对所有 $n,k \in J_+$ 和 $p \in P$ 成立．

D_3: π 连续．

π 的连续性表示 $p_k \to p$ 蕴含 $\pi(n,p_k) \to \pi(n,p)$ 对每个 $n \in J_+$ 成立 ($J_+ \times P$ 为 Fréchet 空间)．满足 D_1 和 D_2 的映射 π 称为流（或称为半流)．

离散动力系统对应于一个差分方程

$$p' = T(p), \tag{2.1}$$

其中 $T(p) = \pi(1,p)$．相反地，每个连续的 $T: P \to P$ 对应动力系统 π，而 $\pi(n,p) = T^n p$．极限点，极限集，不变性等都与第一章中的定义相似． $T^n x$ 的有界性换为 $T^n p$ 的准紧性，即， $\pi(J_+,p)$ 准紧．通常把这种准紧性又称为 Lagrange 意义下的正稳定性．

现在我们随第一章的内容展开，但由于状态空间 P 的一般结构，这里的结果相对较弱．

2.3. 命题 极限集 $\Omega(p)$ 正不变．如果 $T^n p$ 准紧，则 $\Omega(p)$ 非空，准紧，不变．

2.4. 练习 举出一个离散动力系统使得 $T^n p$ 准紧而 $\Omega(p)$ 非闭 (即，非紧)．

3. 不变性原理

Liapunov 函数 $V: P \to R$, $\dot{V}$, 以及 E 和 M 的概念与以前一样，只需将 R^m 换为 P. 我们用 $\Omega(p) \subset S$ 代替 $T^n p = \pi(n,p) \to S$.

3.1. 定理 (不变性原理) π 为 P 上的离散动力系统，V 为 π 在 G 上的 Liapunov 函数. 如果 $\pi(J_+,p)$ 准紧且 $\pi(J_+,p) \subset G$, 则对某个 $c = c(p)$, $\Omega(p) \subset M \bigcap V^{-1}(c)$.

利用这个不变性原理，与以前一样，我们得到了研究稳定与不稳定的直接方法. 因为这里没有假设 P 的拓扑, 所以需要一些修正, 所有定义都必须用收敛与否来描述. 例如第一章引理 7.4 告诉了我们如何定义稳定性. 我们将不在这里展开. 如果没有应用方面的展现，非常不容易预先体会到很多有趣结果的重要意义. 不过，我们现在继续下去，看一看为什么抽象动力系统是有趣的.

4. 非自治差分方程 • 离散过程

4.1. 记号 考虑非自治差分方程

$$x' = T(n,x), \tag{4.1}$$

其中 $T: J \times X \to X$, X 为 Fréchet 空间而 T 连续.

$T_{(n)}: X \to X$ 由 $T_{(n)}x = T(n,x)$ 定义.

$T_k: J \times X \to X$ (T 的变换) 定义为

$$T_k(n,x) = T(n+k,x).$$

对每个 $n_0 \in J$ 和 $n \in J_+$, $T_{n_0}^n: X \to X$ 定义为 $T_{n_0}^0 = I$ 及 $T_{n_0}^{n+1} = T_{(n+n_0)}T_{n_0}^n$. $\hat{T}: J_+ \times J \times X \to X$ 定义为 $\hat{T}(n,n_0,x) = T_{n_0}^n x$. $T_{n_0}^n = \prod_{j=0}^{n-1} T_{(n_0+j)}$, 即 n 个函数的复合.

注意:

$$T_{n_0+k}^n T_{n_0}^k = T_{n_0}^{n+k}. \tag{4.2}$$

及

$$\hat{T}_k(n,n_0,x) = \hat{T}(n,n_0+k,x). \tag{4.3}$$

方程 (4.2) 表沿正时间方向解的唯一性. 方程 (4.3) 表明了如下的事实: 如果 x 为 (4.1) 的解, 则 $x(n+k)$ 为 $x' = T(n+k,x) = T_k(n,x)$ 的解.

4.2. 定义 映射 $\hat{T}: J_+ \times J \times X \to X$ 称为 X 上的离散过程, 如果:

P_1. $\hat{T}(0,n_0,x) = x$ 对每个 $n_0 \in J$ 和 $x \in X$ 成立.

P_2. $\hat{T}(n,n_0+k,\hat{T}(k,n_0,x)) = \hat{T}(n+k,n_0,x)$ 对所有 $n,k \in J_+$, $n_0 \in J$ 和 $x \in X$ 成立.

P_3. $\hat{T}$ 连续.

每一个非自治差分方程 (4.1) 所定义的 T 为一离散过程. 反之, 如果 $\hat{T}$ 为一过程, 则对应的差分方程为 (4.1), 使得 $T(n,x) = \hat{T}(1,n,x)$. 如果 $\phi(n,n_0,x^0,T)$ 为 (4.1) 满足 $\phi(n_0,n_0,x^0,T) = x^0$ 的解, 则 $\phi(n+n_0,n_0,x^0,T) = \hat{T}(n,n_0,x^0) = T^n_{n_0}x^0$. 如果系统在时刻 n_0 的状态为 x^0, 则在时刻 $n+n_0$, 其状态为 $T^n_{n_0}x^0$.

5. 非自治差分方程所对应的动力系统 • 斜乘积

W 表所有函数 $T: J \times X \to X$ 的集合. 记 $P = X \times W$. 给定 $p = (x,T) \in P$ 对每个 $n \in J_+$ 及取定的 $n_0 \in J$, 定义

$$\pi(n,p) = (T^n_{n_0}x, T_n) = \hat{T}(n,n_0,x), T_n). \tag{5.1}$$

容易看出 π 为 P 上的流. 此即斜乘积流.

假如 W 上定义了收敛性, 而 $W_0 \subset W$ 为 Fréchet 空间 (参阅练习 5.7), 则 $P_0 = X \times W_0$ 为一 Fréchet 空间, 其收敛是在通常意义下对乘积空间定义的. 关于稳定性, 我们将视 π 为一离散动力系统, 并且希望由准紧运动 $\pi(n,p)(p=(x,T))$ 在 P_0 中极限集的不变性得到准紧运动 $T^n_{n_0}x$ 在 X 中极限集的不变性.

记 $H(T) = \overline{T_{J_+}}$ 称为 T 的 (正) 壳. 此为正平移 T 在 W 中的闭包. 因此, 我们希望有 $H(T) \subset W_0$ 且 π 为 $X \times H(T)$ 上的离散动力系统. W_0 中具有这种性质的映射 T 称为正则的. 这种正则性概念是相对于 W 上的收敛性的.

设 $\phi(n) = T_{n_0}^{n-n_0}x^0$ 为 $x' = T(n,x)$ 的任意解. 假设存在序列 n_i 使得 $\phi(n_i) \to y$ 及 $T_{n_i} \to S$, 则 $y \in \Gamma$ ($\phi(n)$ 的极限集) 且 $S \in H_\infty(T)$(平移 T_n 的极限集), $H_\infty(T)$ 称为 T 的渐进壳. 方程 $x' = S(n,x)$ 称为 $x' = T(n,x)$ 的极限方程. 如果 T 正则, 则 $\pi(n,p)(p = (x^0,T))$ 的极限集 Ω 正不变 (命题 2.3). $q = (y,S) \in \Omega$ 蕴含对所有 $n \geq 0$, $\pi(n,q) \in \Omega$, 即 $S_{n_0}^n x \in \Gamma$ 对所有 $n = 0$ 成立. W_0 中的函数 T 使得 T_n 准紧 (即, T_{J_+} 在 W_0 中准紧) 称为紧. 这样, Ω 的正不变性给出了如下 Γ 的诱导不变性 (在附录 A 中称为半拟不变性).

5.1. 定理 (诱导不变性) 假设 T 正则且紧, 设 Γ 为 $x' = T(n,x)$ 定义在 $n \geq n_0$ 上的解 $\phi(n)$ 的极限集. 如果 $y \in \Gamma$, 则存在 $S \in H_\infty(T)$ 和极限方程 $x' = S(n,x)$ 满足 $\psi(n_0) = y$ 的解 $\psi(n)$ 且对所有 $n \geq n_0$, $\psi(n) \in \Gamma$.

5.2. 定义 给定 $T \in W$ 和 $x \in X$ 以及 $n_0 \in J$, $T_{n_0}^n x$ 称为 J 上 $T_{(n)_0}^n x$ 的扩张, 如果 $T_{n_0}^{(0)}x = x$ 并且 $T_{n_0+n}^1 T_{n_0}^{(n)} x = T_{n_0}^{(n+1)}x$. 这当然是一个扩张, 因为 $T_{n_0}^{(n)}x = T_{n_0}^n x$ 对 $n \in J_+$ 成立. 如果 $\phi(n) = T_{n_0}^{(n-n_0)}x$ 为 (4.1) 定义在 $n \geq n_0$ 的任意解, 则 $\phi^*(n) = T_{n_0}^{(n-n_0)}x$ 为 (4.1) 在 J 上的扩张解. $\phi^*(n) = \phi(n)$ 对所有 $n \geq n_0$ 成立.

另外, 如果假设 $\phi(n)$ 准紧, 由于极限集 Ω 不变 (命题 2.3), 我们有如下两个结果.

5.3. 定理 (强诱导不变性) 如果除定理 5.1 的假设外, $x' = T(n,x)$ 的解 $\phi(n)$ 准紧, 则对给定的 $y \in \Gamma$, 存在 $S \in H_\infty(T)$ 以及极限方程 $x' = S(n,x)$ 满足 $\psi(n_0) = y$ 的扩张解, 且对所有 $n \in J$, $\psi(n) \in \Gamma$.

5.4. 注 因为 $H_\infty(T)$ 在平移下不变, 可特别取 $n_0 = 0$.

5.5. 定理 (另一个诱导不变性) 假设定理 5.3 条件成立, 则对给定的 $S \in H_\infty(T)$ 存在 $y \in \Gamma$ 和 $x' = S(n,x)$ 满足 $\psi(n_0) = y$ 的扩张解 $\psi(n)$ 且对所有 $n \in J$, $\psi(n) \in \Gamma$.

5.6. 注 定理 5.5 的一个重要特例是当 $n \to \infty$ 时，$\phi(n) \to y$, 则 y 为极限方程 $x' = S(n,x)$ 的平衡点，即 $S(n,y) = y$ 对 $n \geq n_0$ 成立.

5.7. 练习 W 中的收敛定义为 $S^k \to S$, 如果对 $n \in J$, $x^k \to x$ 蕴含 $S^k(n,x^k) \to S(n,x)$. 证明：W 中最大的 W_0 是连续函数集并且每个 W_0 中的 T 都是正则的.

5.8. 练习 用周期差分方程 $x' = T(n,x)(T(n+k,x) = T(n,x)$ 对所有 $n \in J$ 成立，即 $T_k = T)$ 解释如上的结果.

6. 有限维非自治差分方程

考虑差分方程

$$x' = T(n,x), \tag{6.1}$$

其中

$$T : J \times R^m \to R^m.$$

这样，$X = R^m$ 而 W 为所有映 $J \times R^m$ 到 R^m 的函数. 现在我们在 W 上引入一种收敛使得一大类函数 T 具有紧性和正则性.

假设：

H_1. 对每一 $x \in R^m$, $T(n,x)$ 在 J_+ 上有界 (点点有界).

H_2. $T(n,x)$ 在 X 的紧集上等度连续 $(n \geq 0)$.

考虑如下 W 上的三类收敛，(W 为所有函数 $T : J \times R^m \to R^m$ 的集合):

C_1: $S^k \to S$, 如果对每个 $(n,x) \in J_+ \times R^m$, $S^k(n,x) \to S(n,x)$.

C_2: $S^k \to S$, 如果对每个 $n \in J_+$, $x^k \to x$ 蕴含 $S^k(n,x^k) \to S(n,x)$.

C_3: $S^k \to S$, 如果在 $J_+ \times R^m$ 上的紧集一致收敛.

6.1. 练习 证明：如果 T 满足 H_1 和 H_2, 则对于 $T_{n_i} \to S$ (T 平移序列的收敛性), 三种收敛 C_1, C_2 和 C_3 是等价的.

6.2. 引理　假如 T 满足 H_1 和 H_2, 则 T 是正则和紧的 (相对于 C_1, C_2 和 C_3 的收敛性).

7. Liapunov 函数

对 $V: J \times R^m \to R$, 相对于 6.1, 我们定义

$$\dot{V}(n,x) = V(n+1, T(n,x)) - V(n,x)$$

这样, 如果 $x(n)$ 是 (6.1) 的解, 则

$$\dot{V}(n,x(n)) = V(n+1, x(n+1)) - V(n,x(n)).$$

7.1. 定义　$V: J \times R^m \to R$ 称为 (5.1) 在 G 上的 Liapunov 函数, 如果 (i) V 连续, (ii) 给定 $y \in R^m$, 存在 y 的邻域 N 和 $\alpha > -\infty$ 使得对 $x \in N$ 和充分大的 n, $V(n,x) \geq \alpha$, (iii) 存在连续函数 $W: R^m \to R$ 使得对所有 $x \in G$ 和充分大的 n, $\dot{V}(n,x) \leq -W(x) \leq 0$.

集合 E 定义为

$$E = \{x; W(x) = 0, x \in \overline{G}\}.$$

7.2. 定理　设 V 为 (6.1) 在 G 上的 Liapunov 函数. 如果 (6.1) 的解 $\phi(n)$ 有界且对 $n \geq n_0$ 总在 G 内, 则当 $n \to \infty$ 时, $\phi(n) \to E$.

7.3. 注　假设 T 连续. 如果 $V(n,x) = V(x)$, 定理 7.2 的结论为: 存在 c, $\phi(n) \to E \bigcap V^{-1}(c)$.

7.4. 例　考虑 $x'' + a(n)x = 0$. 等价的系统为 $x' = y, y' = -a(n)x$. 取 $V(x,y) = x^2 + y^2$, 则 $\dot{V}(x,y) = -(1 - a^2(n))x^2$. 从而, 如果对所有 $n \geq n_0$,

$|a^2(n)| \le \alpha < 1$, 则当 $n \to \infty$ 时, 每个解 $(x(n), y(n))$ 趋于 $(0, b)$. 下面一个定理使我们能够得到原点是整体渐进稳定的.

相对于 Liapunov 函数 V, 我们定义 M 为 E 中的最大集合具有定理 5.3 的强诱导不变性, 即, $x \in M$, 如果 $x \in E$ 且对某个 $S \in H_\infty(T)$, 存在 $x' = S(n, x)$ 的延拓解始于 x 而对所有 $n \in J$ 仍然在 E 中, 则我们由定理 5.3 得到如下的定理.

7.5. 定理 设 V 为 (6.1) 在 G 上的 Liapunov 函数, 又假设 T 满足 H_1 和 H_2. 如果 $\phi(n)$ 为 (6.1) 的有界解且对 $n \ge n_0$ 属于 G, 则当 $n \to \infty$ 时, $\phi(n) \to M$. 如果 $V(n, x) = V(x)$, 则有 c, 使得 $\phi(n) \to M \bigcap V^{-1}(c)$.

7.6. 例 回到例 7.4, 从注 5.6 可知, 如果当 $n \to \infty$ 时, $(x(n), y(n)) \to (0, b)$, 则 $(0, b)$ 必须是每个极限方程的平衡点 (收敛是 C_1, C_2 或 C_3). 但在我们的假设下, 平衡点必为原点 $(M = \{0\})$, 故原点整体渐进稳定.

7.7. 练习 设 $A(n)$ 为 J_+ 上的有界 $m \times m$ 阶实矩阵函数, 考虑差分方程 $x' = A(n)x$. 假设存在正定矩阵 Q 和半正定矩阵 B 使得 (a) $Q - A^\tau(n)QA(n) - B$ 对每个 $n \ge 0$ 半正定, (b) 如果对每个 $n \ge 0$, 当 $n_i \to \infty$ 时, $A(n + n_i) \to A_\infty(n)$, 则 $Bx = 0$ 和 $BA_\infty x = 0$ 蕴含 $x = 0$. 证明: 原点必为整体渐进稳定.

参考文献

[1] M.A. Aizerman, *On a problem concerning of dynamical systems*, Uspekhi Mat. Nauk.4(1949),pp.187-188.

[2] M.A. Aizerman & F.R. Gantmacher, *Absolute Stability of Regulator Systems*, Holden-Day, San Francisco, Calif., 1964.

[3] B. Anderson & J. Moore, *Linerar Optimal Control*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.,1971.

[4] K.J. Arrow, H.D.Block & L Hurwicz, *On the stability of competitive equilibrium*. II, Econometrica,27(1959),pp.82-109.

[5] K.J. Arrow & F.H. Hahn, *General Competitive Analysis*, Holden-Day, San Francisco, Calif. 1971.

[6] Z. Artstein, *Continuous dependence of fixed points of condensing maps*, Dynamical Systems. An international Symposium, Academic Press, New York, 1976.

[7] Z. Artstein, *Continuous dependence of solutions of Volterra integral equations*, SIAM J. Math. Anal., 6(1975),pp.446-456.

[8] Z. Artstein, *Topological dynamics of ordinary differential equations and Kurzweil equations*, J. Diff. Eqs., to appear.

[9] J. Auslander & P. Seibert, *Prolongations and generalized Liapunov functions*, Internat. Symp. on Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems, Academic Press, New York, 1963,pp.454-462.

[10] J. Auslander,*Prolongations and stability in dynamical systems*, Ann. Inst. Fourier(Grenöble),14(1964),pp.237-267.

[11] R. Bellman, *Introduction to Matrix Analysis*, McGraw-Hill, New York,1960.

[12] R. Bellman, *Vector Liapunov functions*, J. SIAM Control,1(1962), pp.32-34.

[13] N.P. Bhatia & O. Hajek, *Local Semi-Dynamical Systems*, Springer-Verlag, Berlin,1969.

[14] G.D. Birkhoff, *Quelques théorémes sur le mouvement des systémes dynamiques*, Bull. Soc. Math. France,40(1912),pp.305-323.

[15] G.D. Birkhoff, *Dynamical Systems,* Colloq. Publ. Vol.9, Amer. Math. Soc., providence, R.I.,1927, Revised edition, 1966.

[16] N. Chafee, *A stability analysis for a semilinear parabolic equation,* J.Diff.Eqs.,15(1974),pp.522-540.

[17] N. Chafee & E.F. Infante, *A bifurcation problem for a nonlinear partial differential equation,* J.Appl.Anal.,4(1974),pp.17-37.

[18] M.A. Cruz & J.K.Hale, *Stability of functional differential equations of neutral type,* J.Diff.Eqs.,7(1970),pp.334-355.

[19] M. Cuénod & A. During, *A Disrete-Time Approach for System Analysis,* Academic Press, New York, 1969.

[20] C.M. Dafermos, *An invariance principle for compact processes,* J. Diff. Eqs.,9(1971),pp.239-252.

[21] C.M. Dafermos, *Uniform processes and semicontinuous Liapunov functionals,* Ibid, 11(1972),pp.401-415.

[22] C.M. Dafermos, *Applications of the invariance principle for compact processes. I. Asymptotically dynamical systems,* Ibid.,9(1971),pp.291-299; II. *Asymptotic behavior of solutions of a hyperbolic conservation law,* Ibid., 11(1972),pp.416-424.

[23] C.M. Dafermos, *Semiflows generated by compact and uniform processes,* Math. Systems Theory,8(1975),pp.142-149.

[24] C.M. Dafermos, *Contraction semigroups and trend to equilibrium in continum mechanics,* to appear.

[25] C.M. Dafermos & M. Slemrod, *Asymptotic behavior of nonlinear contraction semigroups,* J. Functional Analysis, 13(1973),pp.97-106.

[26] F. DiPasquantonio, *Stability in the first approximation and a critical case relating to nuclear reactor kinetics equations,* Nukleonik, 11(1968), pp.276-282.

[27] J.J. Fearnsides & W.S. Levine, *On the determination of the asymptotic behavior of an intertially-oriented space station,* IEEE Trans. Automatic Control, AC-19(1974),pp.186-1981.

[28] M. Fiedler & V. Ptak, *On matrices with nonpositive off-diagonal*

terms and positive principal minors, Czech. Math. J.,12(1962),pp.382-400.

[29] W.H. Gottshalk & G.A.Hedlund, *Topological Dynamics*, American Math. Soc., Providence, R.I.,1955.

[30] Lj. T. Grujic & D.D.Siljak, *Asymptotic stability and instability of large scale systems*,IEEE Trans. Automatic Control, AC-18(1973),pp.636-645.

[31] J. Hadamard, *Sur les trajectoires en dynamique*, J. de math., 3 Serie, 3(1897),pp.331-387.

[32] W. Hahn, *Über die Anwendung der Methode von Ljapunov auf Differencegleichungen*, Math. Ann.,136(1958),pp.430-441.

[33] W. Hahn, *Theory and Application of Liapunov's Direct Method*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.,1963.

[34] A. Halanay, *Quelques questions de la theórie de la stabilité pour les systémes aux differences finies*, Arch Rational. Mech. Anal., 12(1963),pp.150-154.

[35] A. Halanay, *Solutions périodiques et presquede-périodiques des systémes d'équations differences finies*, Ibid.,12(1963),pp.134-149.

[36] J.K. Hale, *A stability theorem for functional differential equations*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.,50(1963),pp.942-946.

[37] J.K. Hale, *Sufficient conditions for stability and instability of autonomous functional differential equations*, J. Diff. Eqs.,1(1965), pp.452-482.

[38] J.K. Hale, *Dynamical systems and stability*, J. Math. Anal. Appl., 26(1969),pp.39-59.

[39] J.K. Hale, *Ordinary Differential Equations*, Wiley-Interscience, New York,1969.

[40] J.K. Hale, *Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, New York,1971.

[41] J.K. Hale & E.F. Infante, *Extended dynamical systems and stability theory*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.,58(1967),pp.405-409.

[42] J.K. Hale & J.P. LaSalle(eds), *Differential Equations and Dynamical Systems*, Academic Press, New York, 1967.

[43] P. Hartman, *Ordinary Differential Equations*, John Wiley, New York,

1964.

[44] D. Henry, *Geometric theory of semilinear parabolic equations*, unpublished manuscript,1975.

[45] G. Horwich & P.A. Samuelson(eds), *Trade, Stability, and Macroeconomics*, Essays in Honor of Lloyd A. Metzler, Academic Press, New York, 1974.

[46] J. Hurt, *Some stability theorems for ordinary difference equations*, SIAM J. Numer. Anal., 4(1967),pp.582-596.

[47] E.F. Infante & J.A. Walker, *On the stability properties of an equation arising in reactor dynamics*, J. Math. Anal. Appl., to appear.

[48] E.I. Jury, *Inners and Stability of Dynamic Systems*, John Wiley, New York, 1974.

[49] R.E. Kalman & J.E. Bertram, *Control system analysis and design via the second method of Liapunov. II. Discrete systems*, Trans. ASME Ser. D. J. Basic Engrg., 82(1960),pp.394-400.

[50] N.N. Krasovskii, *Stability of Motion with Applications of Lyapunov's Second Method to Differential Systems and Equations with Delay*, Stanford University Press, Stanford, Calif., 1963.

[51] C. Kuratowski, *Topology I*, Academic Press, New York, 1966.

[52] J.P. LaSalle, *The extent of asymptotic stability*, Proc. Nat. Aacd. Sci. U.S.A., 46(1960),pp.363-365.

[53] J.P. LaSalle, *Some extensions of Liapunov's second method*, IRE Trans. Circuit Theory, CT-7(1960),pp.520-527.

[54] J.P. LaSalle & S. Lefschetz, *Stability by Liapunov's Direct Method with Applications*, Academic Press, New York, 1961.

[55] J.P. LaSalle , *Asymptotic stability criteria*, Proc. Symp. Appl. Math. Hydrodynamic Instability, Vol. 13, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1962, pp.299-307.

[56] J.P. LaSalle, *Liapunov's second method , Stability Problems of Solutions of Differential Equations*, Proc. NATO Advanced Study Institute, Padua, Italy, Edizioni “Oderisi”, Gubbio,1966,pp.95-106.

[57] J.P. LaSalle, *An invarance principle in the theory of stability, Differential Equations and Dynamical Systems,* Proc. Inter. Symp., Puerto Rico, Academic Press, New York, 1967,pp.277-286.

[58] J.P. LaSalle, *Stability theory for ordinary differential equations*, J. Diff. Eqs. 4(1968),pp57-65.

[59] J.P. LaSalle, *Stability theory and invariance principle, Dynamical Systems.* An Inter. Symp., Academic Press, New York, 1976.

[60] J.P. LaSalle, *Vector Liapunov functions*, Bull Inst. Math. Academia Sinica Taiwan, 3(1975),pp.139-150.

[61] J.P. LaSalle, *Stability of difference equations, A study in Ordinary Differential Equations*(J.K.Hale ed.) Studies in Math. Series, Amer. Math. Asso., to appear.

[62] J.P. LaSalle & S. Lefschetz, *Stability by Liapunov's Direct Method*, Academic Press, New York, 1961.

[63] J.P. LaSalle & E.N. Onwuchekwa, *An invariance principle for vector Liapunov functions, Dynamical Systems.* An Inter. Symp., Academic Press, New York, 1976.

[64] S. Lefschetz, *Stability of Nonlinear Control Systems*, Academic Press, New York, 1965.

[65] W. Leighton, *On the construction of Liapunov functions for certain nonlinear differential equations*, Contrib. Diff. Eqs., 2(1963),pp.367-383.

[66] A.M. Liapunov, *Probléme général de la stabilité du mouvement*, Ann Math. Studies, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1947.

[67] A.I. Luré & V.N. Postnikov, *On the theory of stability of control systems*, Prikl. Mat. Mehk., 8(1944),pp.246-248.

[68] L. Markus, *Asymptotically autonomous differential systems*, Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations, Vol.3, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J.,1956,pp.17-29.

[69] J.C. Maxwell, *On governors*, Proc. Roy. Soc. London,16(1868),pp.270-283. A reprint of this paper and other selected papers can be found in Bellman and Kalaba, *Mathematical trends in Control Theory*, Dover Publications, New

York, 1964.

[70] O. Mayr, *Zur Frühgeshichte der Technischen Regelungen*, R. Oldenbourg Verlag, München, 1969; English transl.: *The Origins of Feedback Control*, M.I.T. Press, Cambridge, Mass., 1970.

[71] E. McShane, *Integration*, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1947.

[72] L.A. Metzler, *Stability of multiple markets: the Hick's conditions*, Econometrica, 131(1945),pp.277-292.

[73] R.K. Miller, *On almost periodic differential equations*, Bull. Amer. Math. Soc., 70(1964),pp.792-795.

[74] R.K. Miller, *Asymptotic behavior of solutions of nonlinear differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc., 115(1965),pp.400-416.

[75] R.K. Miller, *Asymptotic behavior of solutions of nonlinear delay-differential equations*, J. Diff. Eqs., 1(1965),pp.293-305.

[76] R.K. Miller, *Almost periodic differential equations as dynamical systems with applications to the existence of a.p. solutions*, J. Diff. Eqs., 1(1965), pp.337-345.

[77] R.K. Miller & G.R. Sell, *A note on Volterra integral equations and topological dynamics*, Bull. Amer. Math. Soc., 74(1968),pp.904-908.

[78] R.K. Miller & G.R. Sell, *Existence, uniquess and continuity of solutions of integral equations*, Ann. Mat. Pura Appl.,80(1968),pp.135-152.

[79] R.K. Miller & G.R. Sell, *Volterra integral equations and topological dynamics*, Mem. Amer. Math. Soc., no. 102, 1970.

[80] R.K. Miller & G.R. Sell, *Topological dynamics and its relations to integral equations and nonautonomous systems*, Dynamical System. An Intern. Symp., Academic Press, New York, 1976.

[81] W.E. Milne, *Numerical Calculus*, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1949.

[82] L.M. Milne-Thompson, *Calculus of Finite Differences*, Macmillan, London, 1933.

[83] A.P. Morgan & K.S. Narendra, *On the uniform asymptotic stability*

of certain linear nonautonomous differential equations, Becton Center Tech. Rep. CT-64, Dept. of Engr. and Appl. Science, Yale University, New Haven, Conn., 1975.

[84] V.V. Nemytskii & V.V. Stepanov, *Qalitative Theory of Differential equations*, Princeton Math. Ser. no. 22, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J.,1960.

[85] C. Olech, *On the global stability of an autonomous system in the plane*, Contrib. Diff. Eqs., 1(1963),pp.389-400.

[86] E.N. Onwuchekwa, *Stability of differential equations with applications to economics*, Doctoral dissertation, Brown University, Providence, R.I.,1975.

[87] Z. Opial, *Sur la dépenáance des solutions d'un systéme d'équations différentielles de leur seconds membres. Application aux systémes presque autonomes*, Ann. Polon. Math.,891960),pp.75-89.

[88] P.C. Parks, *A stability criterion for a panel flutter problem via the second method of Liapunov*, Differential Equations and Dynamical Systems, Proc. Internat. Symp. Puerto Rico. Academic Press, New York, 1967,pp.287-298.

[89] A. Pazy, *On the applicability of Lyapunov's theorem in Hilbert space*, SIAM J. Math. Anal.,3(1972),pp.291-294.

[90] T.K.L. Peng, *Invariance and stability for bounded uncertain systems*, SIAM J. Control., 10(1972),pp.679-690.

[91] O. Perron, *Über Sabilität und asymptotische Verhalten der Lösungen eines Systems endlicher Differenzengleichungen*, J. Reine Angew. Math., 161 (1929),pp.41-61.

[92] R.H. Plaut, *Asymptotic stability and instability criteria for some elastic systems by Liapunov's direct method*, Quart. Appl. Math.,(1972),pp. 535- 540.

[93] E.J. Putzer, *Avoiding the Jordan canonical form in the discussion of linear systems with constant coefficients*, Amer. Math. Monthly,73(1966)pp. 2-7.

[94] R.Ressig, G. Sansone and R. Conti, *Nonlinear Differential Equations*

of Higher Order, Noordhoff, Leyden, 1974(transl. of *Nichtlineare Differentialgleichungen hoher Ordroung,* Edizioni Cremonese, Rome, 1969)

[95] H.H.Schaefer, *Banach Lattices and Positive Operators,* Springer-Verlag, New York, 1974.

[96] P.Secbert, *Stability under perturbations in generalized dynamical systems,* Internat. Symp. Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems, Academic Press, New York, 1963, pp.463-473.

[97] G.R.Sell, *Nonautonomous differential equations and topological dynamics,* Trans. Amer. Math. Soc., 127(1967), pp.241-283.

[98] G.R.Sell, *Lectures on Topological Dynamics and Differential Equations,* Van Nostrand-Reinhold, London, 1971.

[99] K.S.Sibirsky, *Introduction to Topological Dynamics,* Noordhoff, leyden, Netherlands, 1975.

[100] V.Singh, *A counterexample to harmonic linearization,* Proc. IEEE (letter), 63(Nov, 1975),p1610.

[101] M. Slemrod, *Asymptotic behavior of a class of abstract dynamical systems,* J.Diff Eqs., 7 (1970),pp.584-600.

[102] M. Slemrod, *Asymptotic behavior of periodic dynamical systems on Banach spaces,* Ann. Mat. Bura Appl., 86(1970),pp.325-330.

[103] M. Slemrod, *Nonexistence of oscillations in a nolinear distributed network,* J.Math. Anal. Appl.,36 (171),pp.22-40.

[104] M. Slemrod & E.F. Infante, *An invariance principle for dynamical systems on Banach spaces,* Instability of Continuous systems, Springer-Verlag, Berlin, 1971,pp.215-221.

[105] A.Strauss & J.A.Yorke, *On asymptotically autonomous ordinary differential equations,* Math.System Theory, 1(1967),pp.175-182.

[106] D.R.Wakeman, *An application of topological dymamics to obtain a new invariance property for nonautonomous ordinary differential equations,* Doctoral dissertation, Brown university. Providence, R.I.,1973.

[107] J.A.Walker, *Liapunov analysis of the generalizer pflueger problem,* ASMEJ.Appl. Mech., 39(1972),pp.935-938.

[108] J.A.Walker, *Energy-like liapunov functionals for linear elastic systems in a Hilbert space*, Quart. Appl.Math.,30(1973),pp.465-480.

[109] J.A.Walker, *On the application of Liapunov's direct method to linear dynamical systems*, J.Math. Anal. Appl., to appear.

[110] T.Yoshizawa, *Asymptotic behavior of solutions of a system of differential equations*, Contrib. Diff. Eqs., 1 (1963),pp. 371-387.

[111] T. Yoshizawa, *Stability Theory by Liapunov's Second Method*, Publication no. 9, Math, Soc. Japan, Tokyo, 1966.

[112] V.I. Zubov, *Methods of A.M.Lyapunov and Their Application*, Noordhoff, Groningen Netherlands, 1964.

附录 A

非自治常微分方程的极限方程和稳定性

亚特斯坦　著

1. 关键的思路

我们考虑由非自治，即时间相关的常微分方程给所决定的系统.

$$\dot{x} = f(s, x). \tag{$*$}$$

关系 $(*)$ 描述了解 $x(s)$ 所满足的运动规律. 我们将研究 $(*)$ 的解的渐近性态和随时间变化运动规律的变化两者之间的某些关系.

本研究的基本出发点可以如下概括.

思路：　在研究 $\dot{x} = f(s,x)$ 解的渐近性态时，利用时间相关函数 $f(x,s)$ 的渐近性态.

虽然想法非常自然和简单，但只是近期这种技巧才得到开发并且用于非线性方程解的稳定性和渐近性态的研究. 本文就是说明和解释上面提到的思路所涉及的方法，即，利用方程 $(*)$ 的极限方程 (马上给出定义). 历史性注记和相关的内容将在其他章节给出 (参阅第 16 节).

这种思路被广泛利用的一种特殊情形即如下的渐近自治系统

$$\dot{x} = g(x) + h(x, s) \tag{1.1}$$

其中扰动当 $s \to \infty$ 时趋于 0(在某种意义下). 这里，至少直观上，依赖时间的方程 (1.1) 的极限性态可以由与时间无关的方程 $\dot{x} = g(x)$ 来刻划，我们称后一方程为 (1.1) 的极限方程，或直接称为极限方程. 因为此时极限方程存在唯一. 一般情形，极限方程可能不止一个.

我们想要稍微阐明一下"方程 $\dot{x} = f(x,s)$ 的渐近性"这个不太明确的术语. 渐近自治情形 (1.1) 是清楚的. 当 t_0 大时，初值问题 (1.1) 满足 $x(t_0) = x_0$

与初值问题 $\dot{x}=g(x)$ 和 $x(t_0)=x_0$ 接近. 一般地，我们想要得到当 $t_k\to\infty$ 时 $\dot{x}=f(x,s)$, $x(t_k)=x_0$ 的性态. 对于一些序列通过方程 $\dot{x}=g(x,s)$ 来得到极限性态是可能的. 这样，我们遇到了没有出现在渐近自治系统中的一个问题，如果我们想要比较 $\dot{x}=f(x,s)$, $x(t_k)=x_0$ 与 $\dot{x}=g(x,s)$, $x(t+k)=x_0$ 的性态就可能与当初的思路相悖. 因为 $g(x,s)$ 的性态本身随时间变化. 因此，必须发展一种方法，将不同初始时刻的初值问题与一个固定性态比较这需要用到方程的平移这个概念.

定义 A　函数 $f(x,s)$ 关于 t 的平移是由 $f^t(x,s)=f(x,t+s)$ 所定义的函数 f^t.

注意，方程 $\dot{x}=f^t(x,s)$ 表示相对于 $\dot{x}=f(x,s)$ 的一个时间变换，即 $s\to s-t$. $\dot{x}=f(x,s)$, $x(t)=x_0$ 的解在这个时间变换下与 $\dot{x}=f^{+}(x,s)$, $x(0)=x_0$ 的解恒同. 这样就使得我们可以比较不同区域和不同初始时刻的解和方程. 从而讨论 $f(x,s)$ 对大 s 的极限性态.

定义 B　方程 $\dot{x}=g(x,s)$ 为 $\dot{x}=f(x,s)$ 的极限方程，如果存在序列 $t_k\to\infty$ 使得平移 f^{t_k} 当 $t\to\infty$ 时收敛于 g.

以上的定义必须在明确了收敛的意义后才是完整的. 一般地，为了达到不同的目的，我们可以采用不同的收敛定义. 显然， $\dot{x}=g(x,s)$ 是否是极限方程取决于所采用的收敛类型.

下面的定义和表示都是自然的，但必须注意的是其结果依赖于决定极限方程的收敛方式.

定义 C　方程 $\dot{x}=f(x,s)$ 为正准紧，如果当 $t_k\to\infty$ 时，存在子列 p_i 使得 f^{p_i} 收敛.

记号.　所有 $\dot{x}=f(x,s)$ 的极限方程记为 $L^+(f)$.

上面的讨论和定义都是关于方程和解当 $s\to+\infty$ 时的性质. 很容易将以上的定义推广到 $s\to-\infty$ 情形. 如果我们使用负准紧这个术语和记号 $L^-(f)$, 读者应该不会感到惊奇.

自然，几乎是自动地，当提及极限方程时，应该明确指常微分方程. 虽然要到第十一节后才开始严格地论及，我们现在还是先给出下面的思路.

思路.　$\dot{x}=f(x,s)$ 及其解的渐近性态也许不能用常微分方程描述，但我们可以尝试用其它 (非 “常”) 方程作为极限方程.

2. 不变性，极限方程及连续依赖性

我们仍然直观地讨论. 我们将关注极限方程的一个特别的应用，即不变性，这就是引入极限方程的目的.

设 $x=x(s)$ 为如下常微分方程的解

$$\dot{x}=f(x,s). \tag{$*$}$$

x 的极限集表为 $\Omega(x)$, 由所有 y 构成，这些 y 满足：存在序列 $t_k\to\infty$ 使得 $x(t_k)\to y$. 当 $(*)$ 为自治，即有形式

$$\dot{x}=f(x). \tag{2.1}$$

时，$\Omega(x)$ 相对于 (2.1) 具有不变性质. 如果 (2.1) 初值问题的解唯一，则不变性为：对任给 $y\in\Omega(x)$, (2.1) 过 y 的解总在 $\Omega(x)$ 中. 其证明本质上根据 (2.1) 的连续依赖性. 给定 $y\in\Omega(x)$, 取序列 $x(t_k)\to y$(参阅图 1(a)). 连续依赖性，粗略地讲就是：通过 $x(t_k)$ 的解的极限为通过极限点 $y=\lim x(t_k)$ 的解. 由定义我们知道，解的极限属于 $\Omega(x)$. 因此，过 y 的解在 $\Omega(x)$ 中.

要得到关于时间相关方程 $(*)$ 对应的不变性结果，我们将遇到几个问题. 最要紧的是确认一个方程，使得 $\Omega(x)$ 相对于该方程不变. 当然不能希望 $(*)$ 的过 $y\in\Omega(x)$ 的解仍然属于 $\Omega(x)$. 我们现在要解释极限方程在下图上的意义.

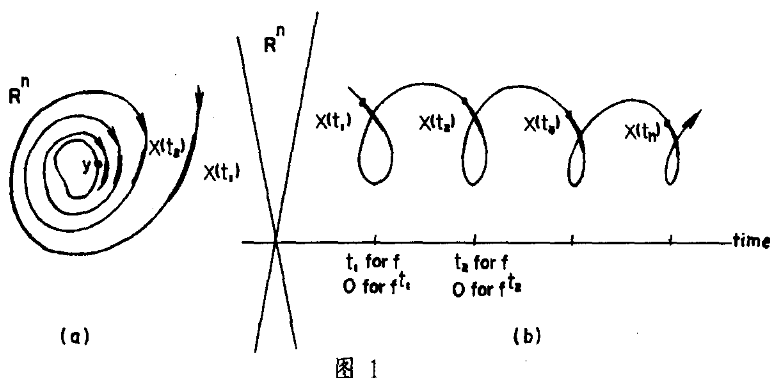


图 1

给定 $y\in\Omega(x)$. 我们取一序列 $x(t_k)\to y$, (再参阅图 1(a)). 但此时，我们必须考虑 $f(x,s)$ 随时间的变化. 因此，我们考虑图 1(b) 中解的时空坐标系，其中对每个点 t_k, 有一变换 f^{t_k}. 假设 f^{t_k}(或其子列) 收敛到 g, 又假设其收敛使得连续依赖性结果成立： $\dot{x}=f^{t_k}(x,s)$ 过 $(x(t_k),0)$ 的解的极限为过极限 $(y,0)$, 方程 $\dot{x}=g(x,s)$ 的解. 仍然把 $\dot{x}=f^{t_k}(x,s)$ 过 $(x(t_k),0)$ 的解称为原来解 x 的一个平移，结论是 $\dot{x}=g(x,s)$ 满足 $x(0)=y$ 的解属于 $\Omega(x)$. 总之，极限方程总使得 $\Omega(x)$ 具有某种不变性质.

如上的分析表明了为得到不变性我们需要合适的收敛类型. 我们需要的收敛性要保证解对初值以及方程右端的连续依赖性.

3. 假设

现在进入本章的正式部分，我们将给出关于微分方程

$$\dot{x}=f(x,s), \tag{$*$}$$

的假设和限制.

状态空间为 n 维欧氏空间 R^n. $x\in R^n$ 的范数表为 $|x|$. 假设 f 关于 x 连续，关于 s 可测，局部满足 Caratheory 条件 (参阅 [15],p.28) 并且一致满足：

假设(A)　对每个紧集 $K \subset R^n$, 存在单调不减函数 $\mu_k : [0,\infty) \to [0,\infty)$ 在 0 点连续且 $\mu_k(0) = 0$, 并使得只要 $u : [a,b] \to K$ 连续，则积分 $\int_a^b f(u(s),s)ds$ 存在，且估计

$$|\int_a^b f(u(s),s)ds| \leq \mu_k(b-a)$$

成立.

这些假设非常弱. 假设 (A) 允许 f 关于时间无界，虽然其平均是有界的. 关于进一步的讨论和注释，参阅 [5].

下面的一些结果可以在减弱的条件下得到，但我们不准备详细讨论.

4. 收敛性

我们将要给出定义在 $R^n \times R$ 上的函数空间 $\mathcal{G}$ 上的收敛结构的定义. 即是，我们在空间中指定某些序列 g_k(收敛序列) 使得极限 $g_0 = \lim g_k$ 存在.

为确定空间 $\mathcal{G}$, 我们利用假设 (A) 中的模 μ_k. $\mathcal{G}$ 为所有关于 x 连续，关于 s 可测的函数且满足

$$|\int_a^b g(u(s),s)ds| \leq \mu_k(b-a) \tag{4.1}$$

只要 $u : [a,b] \to k$ 连续， $k \subset R^n$ 紧.

显然，所有 f 的平移变换 f^t ($f^t(x,s) = f(x,t+s)$) 属于 $\mathcal{G}$.

定义 4.2　假设当 u_k 为 $[a,b]$ 上的连续函数序列并且一致收敛到 u_0 时，$\mathcal{G}$ 中的序列 g_k 收敛到 g_0, 则

$$\int_a^b g_k(u_k(s),s)ds \to \int_a^b g_0(u_0(s),s)ds \tag{4.3}$$

注　条件 (4.1) 表示相对于紧集， (4.3) 的收敛在 $\mathcal{G}$ 中是一致的.

当 g_k 为 f 的平移 f^{t_k} 时，收敛 (4.3) 可以写成

$$\int_a^b f(u_k(s), t_k + s)ds \to \int_a^b g_0(u_0(s), s)ds.$$

另外一个下面要用到的性质是，如果 f^{t_k} 收敛于 g, 则 f^{t+t_k} 收敛于平移 g^τ. 相对于极限方程，这意味着在平移变换下，$L^+(f)$ 是闭的.

我们要讨论空间 $\mathcal{G}$ 在定义 4.2 收敛意义下的结构，虽然这种结构在以下大多数分析中并不涉及. 容易验证，收敛满足 [17,p.188] 的 (i) 到 (iii). 这样，具有这种收敛的空间 $\mathcal{G}$ 被称为 $\mathcal{L}^*$ 空间是合适的 (有时称为收敛空间). 下面是一些相关问题:

1. 这种收敛是由一种拓扑还是一种度量生成？
2. 能给这种收敛更合适的表示吗？
3. 这种收敛与已经出现在文献中的其他结构有什么关系？
4. 收敛的条件能否减弱？

要详细探究这些问题的答案将远离我们的主题，所以我们推迟到第 15 节讨论.

5. 一些例子和注解

5.1 方程

$$\dot{x} = g(x) + h(x, s)$$

关于定义 4.2 的收敛为一渐近自治系统，如果 $[a, b]$ 上的连续函数序列 u_k 当 $t_k \to \infty$ 时一致收敛到 u_0, 则

$$\int_a^b h(u_k(s), t_k + s)ds \to 0. \tag{5.1}$$

这种收敛比 Strauss 和 Yorke[40] 或 Markus[26](同时参阅 [5]) 的定义要弱.

5.2 如果 $h(x, s)$ 满足 (5.1), 则方程 $\dot{x} = f(x, s)$ 以及扰动方程 $\dot{x} = f(x, s) + h(x, s)$ 具有同样的极限方程.

5.3　$\dot{x}=\sin(s)^{\frac{1}{2}}$ 的极限方程是所以形如 $\dot{x}=\alpha$ 的方程，其中 α 为满足 $-1\leq\alpha\leq1$ 的常数.

5.4　方程

$$\dot{x}=\sin(s)^2$$

仅有极限方程 $\dot{x}=0$. 更一般，在 R^2 中，方程

$$\dot{x}=(e^{\tau}\sin e^{2\tau},e^{\tau}\sin e^{2\tau})$$

以 $\dot{x}=0$ 为极限方程, 虽然其右端的模当 $\tau\to\infty$ 时, 趋于无穷 (查阅 Strauss 和 Yorke[40]).

5.5　周期方程 $\dot{x}=p(x,s)$ $(p(x,s+T)=p(x,s))$ 的极限方程为函数空间中一圆环，$p^t,0\leq t\leq T$.

5.6　如果当 $\tau\to\infty$ 时，$r(\tau)\to1$ 足够慢，则

$$\dot{x}=\sin r(\tau)\tau$$

的极限方程为周期环 $\dot{x}=\sin(\alpha+\tau)$, $0\leq\tau\leq2\pi$, 即为周期方程的一个平移. 然而，方程本身并不是当某一项趋于 0 时，某个周期方程的扰动.

5.7　设 $f(x,s)$ 在 $R\times R$ 上满足：如果存在正整数 k, $s-x=2^k$, 则 $f(x,s)=1$; 如果 $|s-x-2^k|\leq2^{-k}$, 则 $0\leq f(x,s)\leq1$; 否则 $f(x,s)=0$. 则 $\dot{x}=f(x,s)$ 非正准紧. 但是存在极限方程 $\dot{x}=0$.

5.8　如果一个方程有唯一的极限方程，则极限方程必为自治，因为它与它的所有平移相等 (这些平移也为极限方程).

5.9　如果一个方程正准紧且有唯一极限方程，则其必有如下形式

$$\dot{x}=g(x)+h(x,s)$$

其中，当 $t\to\infty$ 时，$h^t\to0$, 即，渐近自治. 这是容易验证的. 如果没有准紧性，结论不成立. 如例 5.7.

6. 连续依赖性

本节的目的是要证明 $\dot{x} = g(x, s)$, $x(0) = x_0$ 的解连续依赖于 $x_0 \in R^n$ 和 $g \in \mathcal{G}$, 后者相对于定义 4.2 的收敛性. 我们没有假设解的唯一性, 所以我们将采用 Kamake 给出的一个连续依赖性的公式 (参阅 [39,p.46] 或 [16, 定理 3.2. p.14]).

定理 6.1 设 $y_k \to y_0$ 在 R^n 中成立, 而 $g_k \to g_0$ 在 $\mathcal{G}$ 中成立, 对每个 $k = 1, 2, \ldots$, 假设 $x_k = x_k(s)$ 为 $\dot{x} = g_k(x, s), x(0) = y_k$ 的最大定义的解, 则存在子列 x_m 收敛于 $\dot{x} = g_0(x, s), x(0) = y_0$ 的最大定义的解 x_0, 收敛在 x_0 存在的紧子区间上是一致的.

这个结果的一个不同的成述在 [15, 定理 5.3] 得到了证明. [3, 定理 3.1] 中的证明方法作一些小的改动即可用于现在的情形.

利用 $\dot{x} = g(x, s), x(0) = y$ 的最大定义的解 $s(y, g)$ 的集合, 可以给出连续依赖性更优美的表述. 在紧区间上一致收敛这种度量结构可以引入到解集上 (虽然解的存在区间可以不同)(参阅 [5, 第四节]). 这样, 定理 6.1 表示 $s(y, g)$ 关于 (y, g) 是紧值的和上半连续的 (参阅 [2]).

7. 不变性质和不变性原理

我们将推导和严格证明第二节中所描述的结果. 然后给出一般的不变性原理. 再次考虑方程

$$\dot{x} = f(x, s). \tag{*}$$

为方便, 我们复习几个定义. f 的平移 f^t 定义为 $f^t(x, s) = f(x, t+s)$. (*) 的极限方程为 $\dot{x} = g(x, s)$ 使得对某些序列 $t_k \to \infty$, 收敛 $f^{t_k} \to g$ 成立. 这里的收敛性由定义 4.2 所定义. 方程 (*) 为正准紧, 如果 $t_k \to \infty$ 蕴涵 f^{t_k} 的一个子列收敛. (*) 的极限方程类表为 $L^+(f)$. 函数 $x = x(s)$ 的 ω- 极限集为序列 $t_k \to \infty$ 时, 极限 $\lim x(t_k)$ 的集合, 表为 $\Omega(x)$.

定理 7.1 设 $x = x(s)$ 为 (*) 定义在 $t_0 \le s < \infty$ 上的解. 如果存在序列 $t_k \to \infty$, 使得在 R^n 中向量 $x(t_k) \to y_0$, 而 $\mathcal{G}$ 中函数 $f^{t_k} \to g$, 则

$\dot{x}=g(x,s), x(0)=y_0$ 的最大定义的解 $y=y(s)$ 存在且 $y(s)\in\Omega(x)$ 关于每个属于 $y(s)$ 定义域的 s 成立.

证明:　$x_k=x_k(s)$ 由 $x_k(s)=x(t_k+s)$ 定义. 则 x_k 为 $\dot{x}=f^{t_k}(x,s), x(0)=x(t_k)$ 的解. 由定理 6.1, 子列 x_m 存在并且收敛于 $\dot{x}=g(x,s), x(0)=y_0$ 的解 y. 设 τ 属于 y 的存在域, 则当 $k\to\infty$ 时, $x(t_k+\tau)=x_k(\tau)\to y(\tau)$. 此即 $y(\tau)\in\Omega(x)$. 证毕.

关于 ω- 极限集的不变性可由定理 7.1 推出, 我们给出几个.

定理 7.2(局部半拟不变性)　设 x 为 (*) 的解. 如果 (*) 正准紧, 则对每个 $y_0\in\Omega(x)$, 存在 (*) 的极限方程 $\dot{x}=g(x,s)$ 且存在 $\dot{x}=g(x,s), x(0)=y_0$ 的一个解 $y=y(s)$ 整个属于 $\Omega(x)$.

证明:　取序列 $x(t_k)\to y_0$, 则 f^{t_k} 的收敛子列存在, 且以 g 为极限. 再利用定理 7.1 即得.

解释与改进.　定理 7.2 中的 "局部" 表明通过 y_0 的解可能不是对所有 s 都有定义. 一个非常经典的例子由图 2 表示, 其中方程在直线 $y=1$ 上为 $\dot{x}=1+x^2, \dot{y}=0$. 这里, ω- 极限集是无界的. 如果 $\Omega(x)$ 紧, 则 y 对所有的 $s\in R$ 有定义, 因为具有有界最大存在区间的解必然无界. 在这种情形 ($\Omega(x)$ 有界), "局部" 一词可以去掉.

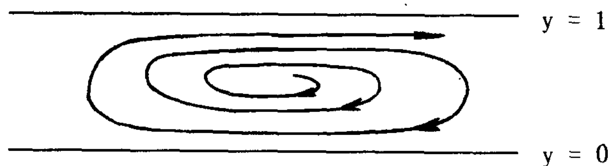


图 2

定理 7.2 中的 "半" 和 "拟" 使我们想起两个表述中的存在性量词. 确实, 并非对每个极限方程都适合, 如果一个极限方程还有另一个解通过 $(y_0,0)$, 则它必不属于 $\Omega(x)$. 在极限方程的初值问题解唯一情形, "拟" 字

可以去掉. 如果存在唯一极限方程 (同时具有正准性, 意味着方程是渐近自治的), 我们可以不用 "半" 这个字. (见图 (2))

定理 7.3(**另一个半拟不变性**) 设 $x = x(s)$ 为 $(*)$ 的解, 假设 $\Omega(x)$ 非空且紧. 则对 $(*)$ 的每个极限方程 $\dot{x} = g(x, s)$, 存在向量 $y_0 \in \Omega(x)$ 使得 $\dot{x} = g(x, s), x(0) = y_0$ 的一个解 $y = y(s)$ 存在, 且对所有 $s \in R, y(s) \in \Omega(x)$.

证明与前一个定理的证明相似, 只需要变换一下构造的序列的顺序. 首先, 取 $f^{t_k} \to g$. $\Omega(x)$ 的紧性蕴涵了 $\{x(s) : s \geq t_0\}$ 的紧性. 因此, 存在子列 $x(t_m) \to y_0 \in \Omega(x)$. 现在, 将定理 7.1 用于序列 t_m. $\Omega(x)$ 的紧性蕴涵了 y 在整个 R 上有定义.

推论 7.4 如果当 $s \to \infty$ 时, $x(s)$ 收敛到 y_0, 则 y_0 为任意极限方程的平衡点.

将 ω 极限集的不变性和包括 Liapunov 直接方法的一些技巧相结合形成了处理非线性系统稳定性和渐近稳定性的强有力的工具. 这个强大的工具就是 LaSalle 不变性原理. 其基本的想法是利用直接方法确定集合 E 的稳定和吸引区域, 然后将不变性原理应用于 E 的子集使得结论更为精确. 在很多例子中, 不变性原理比较 Liapunov 理论所得到的结果要精细得多. (参考文献有 [9],[20-24],[33],[34],[35],[41]. 同时参阅第十六节的注).

我们将马上展开本文的第二部分. 下一节将讨论问题的第一半, 即如何确定 E 的问题.

定义 7.5 集合 $Q \subset R^n$ 关于一类方程 $\mathcal{L} = \{\dot{x} = g(x, s)\}$ 为局部半拟不变, 如果对每个 $y_0 \in Q$, 存在属于 $\mathcal{G}$ 的方程 $\dot{x} = g(x, s)$ 以及 $\dot{x} = g(x, s)$ 的一个通过 $(y_0, 0)$ 的最大定义的解 $y(s)$ 使得对每个 $y(s)$ 定义域中的 s, $y(s) \in Q$.

定理 7.2 后面的解释与改进也适合于以上结果.

定理 7.6 设 $x = x(s)$ 为 $(*)$ 的有界解且当 $s \to \infty$ 时, $x(s)$ 趋于集合 $E \subset R^n$. 如果 $(*)$ 正准紧, 则 $x(s)$ 收敛到 E 中的最大集合 M, M 相对于 $L^+(f)$ 为局部 - 半拟不变.

以上定理的证明可直接由定义 7.5 和定理 7.2 得到.

例 7.7　在 $(x,y) \in R^n \times R^m$ 中，考虑方程

$$\dot{x} = f_1(x,y,s), \dot{y} = f_2(x,y,s) + f_3(x,y).$$

假设 $x \neq 0$ 时，$f_3(x,y) \neq 0$. 再假设方程为正准紧. 如果有界解 $(x(s),y(s))$ 满足 $y(s) \to 0$, 则 $x(s) \to 0$. 事实上，ω- 极限集中 y 坐标为 0, 则可记 $E = \{(x,y) : y = 0\}$. 因为对任意 E 上的极限方程 $\dot{y} = f_3(x,y)$, E 中只有原点为不变集.（这个解释性的例子为 Levin 在 [25] 中的特例.）

与定理 7.6 类似的结果也可以借助于定理 7.3 中的不变性质给出. 现在说明这一点.

例 7.8　方程与例 7.7 中的一样，但去掉方程为正准紧的假设. 我们假设至少存在一个极限方程. 结论为：　满足 $y(s) \to 0$ 的有界解 $(x(s),y(s))$ 使得原点属于其 ω- 极限集. 如果还有原点一致稳定假设，则 $x(s) \to 0$. 证明可由定理 7.6 直接得到.

我们将通过讨论 Infante 和著者的工作 [7] 来结束本节. 关于某些阻尼系数的增长阶这类定量结果已经通过与本节类似的定性分析而得到. 其结论是推论 7.4 的一个应用. [7] 的第四节解释了与不变性原理的关系.

8. 如何确定 E

现在讨论不变性原理的前半部分，即如何利用 Liapunov 函数找到方程

$$\dot{x} = f(x,s), \qquad (*)$$

的解收敛到的集合 E.

函数 $V(x,s)$ 为 $(*)$ 的 Liapunov 函数，如果 V 连续，$V(x,s) \geq 0$ 且 $V(x(s),s)$ 对每个 $(*)$ 的解 $x(s)$ 关于 s 单调不增. 我们定义

$$V'(x,s) = \lim_{h\to 0^+} \sup \frac{1}{h}[V(x(s+h),s+h) - V(x(s),s)],$$

这里 lim sup 作用于通过 (x,s) 的所有解 $x(s)$. 在非常弱的假设下, V' 可以通过方程 $(*)$ 直接计算而不涉及其解 (参阅 LaSalle[23] 和 Yoshizawa[43]).

下面的结果是由 LaSalle[23] 给出的 Yoshizawa[42] 结果的推广. 在 [23] 中, 假设当 x 有界时 $f(x,s)$ 关于 s 有界, 容易验证其证明适用于如下情形.

定理 8.1 设 $f(x,s)$ 满足假设 (A). V 为 $(*)$ 的 Liapunov 函数且满足 $V'(x,s) \le W(x) \le 0$. 这里 W 为一连续函数. 记 $E = \{x : W(x) = 0\}$. 则当时间趋于无穷时, $(*)$ 的任意有界解趋于 E.

定理 8.1 的推广由 Burton[8] 及 Haddock[13], [14] 得到. 这些结果主要是减弱条件 $V'(x,s) \le W(x)$ 和 f 的有界性. (估计 $V'(x,s) \le W(x)$ 表示一个自治函数 W 控制非自治 V 的减少, 这是一个限制性假设). 下面的结果本质上属于 Haddock [14, 定理 3].

定理 8.2 $H \subset R^k$ 为一闭集. 对每一个与 H 不交的紧集 K, 存在 $\delta > 0$ 使得对 $x \in K$, 有

$$V'(x,s) \le -\delta|f(x,s)| + e(s)$$

其中 $e(s)$ 可积, 则 $(*)$ 的有界解当 t 趋于无穷时, 或者趋于一个常数或者趋于 H.

读者应该已经注意到了, 定理 8.1 和 8.2 中的集合 E 和 H 是通过原方程 $(*)$ 的 Liapunov 函数来确定的. 在本文中, 我们很自然的提出如下的想法.

想法 能否利用 $(*)$ 的极限方程的 Liapunov 函数来确定集合 E?

肯定的回答将带来方便, 因为在很多时候, 极限方程的结构更为简单并且更容易处理, 例如渐近自治情形. 著者在这方面做过一些工作, 将在 [6] 中发表. 我们希望在这里给出部分结果.

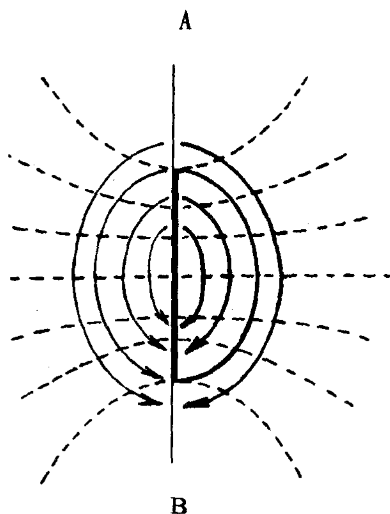


图 3

既使在渐近自治情形 $\dot{x} = g(x) + h(x,s)$ 也有一些困难. 如果 $V(x)$ 为 $\dot{x} = g(x)$ 的 Liapunov 函数, 而扰动方程的解不必收敛到 $E = \{x : V'(x) = 0\}$. 图 3 中给出了例子. 其中在 AB 段上 $g(x) = 0$. $\dot{x} = g(x)$ 的轨线由实线表示而 V 的等位曲线由虚线表示. 则当 x 属于线段 AB 时, $V'(x) = 0$. 而 $\dot{x} = g(x)$ 的每个解趋于 E. 但对于小扰动 h, $\dot{x} = g(x) + h(x,s)$ 的解可能从 B "翻越" 到 A (相对于 V "翻越") 然后沿 $\dot{x} = g(x)$ 的解回来. 其结果是粗闭曲线为 ω- 极限集 (见图 (3)).

上面的例子成立是因为 $E = \{x : V'(x) = 0\}$ 的不稳定性. 如果 E 稳定, 我们有如下的,

定理 8.3 假设

$$\dot{x} = g(x) + h(x,s) \tag{8.4}$$

渐近自治 (即, 当 $t \to \infty$ 时, $h^+ \to 0$). 设 $V = V(x)$ 为 $\dot{x} = g(x)$ 的 Liapunov 函数. 如果 $E = \{x : V'(x) = 0\}$ 紧, 且关于 $\dot{x} = g(x)$ 稳定, 则

(8.4) 的每个有界解 $x = x(s)$ 收敛到 E.

证明: ω- 极限集 $\Omega(x)$ 关于 $\dot{x} = g(x)$ 不变. 取 $y_0 \in \Omega(x)$, 设 $y = y(s)$ 为 $\dot{x} = g(x)$ 属于 $\Omega(x)$ 中的解, 则 $\Omega(y) \subset \Omega(x)$ 并且 $\Omega(y) \subset E$. 因此, $x(s)$ 接近 E 无穷多次. 容易证明, 如果 $x(s)$ 关于大 s 接近 E, 则它必"陷"于 E 的某个邻域中, 再由 E 的渐近稳定性以及 t 大时方程 $\dot{x} = g(x) + h^t(x,s)$ 接近 $\dot{x} = g(x)$ 的事实即得结论.

定理 8.3 的证明也可由扰动理论给出, 但必须注意的是我们仅仅用到 t 大时 $g + h^t$ 接近 g 这个事实. 这个方法可以推广到非渐近自治系统, 而扰动理论对此是无效的. 例如

定理 8.4 假如 (*) 正准紧而 f^t 到 $L^+(f)$ 的收敛是由度量诱导给出的. 假如 $L^+(f)$ 在函数空间 $\mathcal{G}$ 中为一环, 即由周期方程 (周期 T)

$$\dot{x} = p(x,s) \tag{8.6}$$

生成. 设 $V(x,s)$ 为 (8.6) 的周期 Liapunov 函数. 如果 $V'(x,s) \le W(x) \le 0$ 而 w 连续, 又假设 $E = \{x : W(x) = 0\}$ 为紧且相对于 (8.6) 渐近稳定, 则 (*) 的每一个有界解趋于 E.

其证明与定理 8.3 几乎一样. 不同之处仅仅是当证明 $x = x(s)$ "陷入" E 的邻域时, 我们利用 t 大时, f^t 接近 p 的平移这个事实.

定理 8.4 的结果不能通过扰动方法得到, 因为其假设不蕴涵 f 有表示 $f = p + h$ 而 $h^t \to 0$(参阅, 例 5.7). (在某种意义上, 定理 8.7 回答了 Sell[38] 第 6 节中的注).

9. 关于二维渐近自治系统的注记

我们将给出 Markus 推广的关于渐近自治方程的 Poincaré- Bendixson 定理的证明梗概 [26, 定理 7]. (不幸的是, [26] 的证明是不完全的.) 证明本质上与定理 8.3 的证明相同. 注意, 我们使用的关于扰动的收敛比 [26] 中的弱.

定理 9.1 (Markus)　在 R^2 中

$$\dot{x} = g(x) + h(x,s) \tag{9.2}$$

为渐近自治，(即 $t\to\infty$ 时，$h^t\to 0$). 设 (9.2) 的解 $x=x(s)$ 属于紧集 $K\subset R^2$ 且 $\Omega(x)$ 不含 $\dot{x}=g(x)$ 的任何奇点. 又假设 $\dot{x}=g(x)$ 具有唯一性，则 $\Omega(x)$ 为 $\dot{x}=g(x)$ 的闭轨之合.

证明:　设 $y_0\in\Omega(x)$, 如果 y_0 位于 $\dot{x}=g(x)$ 的闭轨之上，则得证. 否则，Poincaré-Bendixson 定理 (参阅 [15]) 蕴涵了通过 y_0 的 $\dot{x}=g(x)$ 的解 y 从内 (或外) 绕向一个闭轨 (因为 $\Omega(y)\subset\Omega(x)$, $\Omega(y)$ 中无奇点). 而 $\Omega(y)$ 也是从外 (或内) 渐近稳定的. 因为 $\Omega(y)\subset\Omega(x)$, 所以当 $s\to\infty$ 时，$x(s)$ 接近 $\Omega(y)$ 无穷多次，但对大 s, $x(s)$ 总 "陷" 于 $\Omega(y)$ 临近. 故 y_0 不可能属于 $\Omega(x)$.

10. 约束情形的正准性

在几个地方，我们用过条件，即方程

$$\dot{x} = f(x,s) \tag{$*$}$$

正准紧 (定义 C). 参看定理 7.2, 7.6 及例 7.7. 有时，保证正准紧性的条件显得太强. 小标题中的 "约束情形" 即与第一节最后的 "思路" 相关. 在后面的第十四节，我们将考查正准紧性. 在那里，极限方程不一定为常微分方程. 正准紧性条件可明显减弱.

· **定理** 10.1　假如对每个紧集 $A\subset R^n$, 存在两个局部 L_1 函数 $M_A(s)$ 及 $K_A(s)$ 使得如果 $x,y\in A$ 而 $s\in R$:

(i)　$|f(x,s)|\le M_A(s)$,

(ii)　$|f(x,s)-f(y,s)|\le K_A(s)$,

而这样的 $M_A(s)$ 和 $K_A(s)$ 满足:

(iii)　关于 $s\in R$, 由 $m_s(\tau)=M_A(s+\tau)$ 给出的 L_1 函数类 $m_s(\tau)$: $[0,1]\to R$ 在 L_1 弱准集 (一致可积) 中有界.

(iv) 关于 $s \in R$, 由 $k_s(t) = k_A(s+\tau)$ 给出的 L_1 函数类 $k_s(\tau):[0,1] \to R$ 在 L_1 弱准集 (一致可积) 中有界.

则 (*) 正准紧，即，当 $t_i \to \infty$ 时， f^{t_i} 的子列收敛到一个 (通常的) 函数 $g = g(x,s)$.

其证明可参阅 [3, 定理 4.1]. 这个结果推广了 Wakeman[41] 中的结果. [41] 中假设 M_A 和 K_A 为常数. 看起来定理 10.1 的结论可以进一步推广，将 Lipschitz 条件 (ii) 换为合适的等度连续性条件.

11. 常微分方程是不够的

我们转而考虑第一节最后的想法. 首先，我们想要解释为什么

$$\dot{x} = f(x,s) \tag{*}$$

的解的极限性态可能不能用常微分方程描述. 然后，如果我们允许其他形式的方程，则可得到相应的结论，并且包括更广的内容和性态.

假设 (*) 的解绝对连续，特别地，几乎处处可微. 然而，可微，甚至 C^∞ 函数的序列可能一致收敛到一个处处不可微的函数. 在第二节的分析中，我们曾提到如下情形的重要性. 解 x 的平移 x^{t_j}(注意 $x^t(s) = x(t+s)$) 收敛到 y, 平移 f^{t_j} 收敛到 g, 则 y 为 $\dot{x} = g(x,s)$ 之解. 如果 x^{t_j} 收敛到 y 但 y 并不是几乎处处可微，情形又怎样呢？没有常微分方程 $\dot{x} = g(x,s)$ 以 y 为解. 其结果是， f^{t_j} 不可能收敛. 而我们的理论有问题. 但是，仍然有希望. 函数 y 可能是一个方程的解，而这个方程不是常微分方程. 如果我们能够将 f^{t_j} 或 $\dot{x} = f^{t_j}(x,s)$ 收敛到这个方程赋予新的意义，或者允许极限方程为非常微分方程，我们仍然可能保持前面提到的结构.

可以作为常微分方程的极限方程 (*) 的一个例子是

$$x(\tau) = x(a) + \int_a^\tau g(x(s),s)d\eta(s), \tag{11.1}$$

其中 η 为实轴上的连续测度. 显然，如果我们用 $\theta(s)$ 去近似 $d\eta$ (ds 为

Lebesgue 测度), 则常微分方程 (以其积分形式)

$$x(\tau) = x(a) + \int_a^\tau g(x(s), s)\theta(s)ds, \tag{11.2}$$

与 (11.1) “接近” (关于一个特别的例子，参阅 [5, 第十节]).

数学上的考虑一般是将 (*) 的平移 $\dot{x} = f^t(x, s)$ 嵌入到 (非常微分) 方程的空间中去，再赋予这个空间一种收敛结构，使得某些性质被保留下来. 本文的目的，特别是关于不变性，将关注与定理 6.1 连续依赖性相对应的结果.

在下面的三节中，我们系统讨论这个理论的一些内容. 首先在第十二节中，寻找 (*) 的极限方程的一般形式，同时确定适合于这类方程的收敛类型. 我们也会提及这些极限方程的分类. 在第十三节中，我们陈述关于这种更大类方程所得到的不变性原理. 在第十四节中，我们给出正准紧性的条件，所考虑的方程可以是非常微分方程. 证明将不给出，完整的理论可以在 [4],[5] 中找到.

12. 常可积型算子方程，定义，收敛性和分类

定义 12.1　常可积型算子 H 为一映射，此映射对每个 R^n- 值连续函数 u 及 u 定义域中的 a 确定了一个连续函数 $H_a u$, 使得:

(i)　$H_a : C[a,b] \to C[a,b]$ 对每个区间 $[a,b]$ 连续.

(ii)　$H_a u(t) = H_a u(s) + H_s u(t)$ 对 s, t, a 属于 u 的定义域成立.

我们仍然假设常微分方程

$$\dot{x} = f(x, s) \tag{*}$$

满足假设 (A). 对右端的 f, 我们对应一个由下式定义的常可积型算子 H

$$H_a u(\tau) = \int_a^\tau f(u(s), s)ds.$$

显然，假设 (A) 蕴涵了所有属于 H_a 的函数是等度连续的. 这个性质将传递给极限方程. 因此，我们有

定义 12.2 我们称常可积型算子 H 满足假设 (A), 如果当 $u:[a,b]\to K\subset R^n$ 连续时, 不等式 $|H_a u(b)|\le \mu(b-a)$ 成立.

定义 12.3 对应于常可积型算子 H 的方程为

$$u = Hu. \tag{**}$$

函数 $u(s)$ 为 (**) 的解, 如果对其定义域中的 s 和 a 有

$$u(s)=u(a)+H_a u(s).$$

初值问题 $u=Hu, u(a)=x_0$ 可以等价地写成 $u(s)=x_0+H_a u(s)$. (注意: $u=Hu$ 仅仅为一个符号, Hu 没有被定义.)

方程 (**) 可以作为 (*) 的极限方程, 其中 H 满足假设 (A).

读者也许注意到了, 极限方程一般形式的构造本质上是 $\mathcal{G}$(第四节) 关于定义 4.2 中收敛的一个完备化过程, 这直接给出了算子方程的收敛性.

定义 12.4 如果当连续函数序列 $u_k:[a,b]\to R^n$ 一致收敛到 u 时, 平移序列 f^{t_k}(当 $t_k\to\infty$ 时) 收敛到算子 H, 则 $\int_a^b f^{t_k}(u_k(s)),s)ds$ 收敛到 $H_a u(b)$.

这种收敛可以很容易地按假设 (A) 推广到可积算子类的收敛 (参阅 [5, 定义 5.1]). 对于这一类常可积型算子方程, 我们也有对应的连续依赖性结果 (定理 6.1). 我们现在来陈述关于平移收敛到算子的结果.

定理 12.5 设 $y_k\to y_0$ 在 R^n 中成立, 而当 $t_k\to\infty$ 时, $f^{t_k}\to H$. 对每个 k, 假设 $x_k=x_k(s)$ 为 $\dot{x}=f^{t_k}(x,s), x(0)=y_k$ 的最大定义的解, 则存在子列 x_m 收敛于 $u(s)=y_0+H_a u(s)$ 的最大定义的解 u, 收敛在 u 存在的紧子区间上是一致的 (参阅 [5, 第四, 五节]).

我们想要陈述的一个完整结果是: 如果 $t_k\to\infty$ 且 $u_k:[a,b]\to R^n$ 一致收敛时, 向量序列 $\int_a^b f^{t_k}(u_k(s),s)ds$ 收敛, 则序列 f^{t_k} 收敛到某个满足假设 (A) 的常可积型算子方程 (参阅 [5, 命题 6.6]).

有趣并且重要的问题是把作为极限方程出现的常可积型算子方程进行分类. 了解极限方程的某些特殊类型将是有帮助的. 一类被研究过的方程即 Kurzweil 方程. Kurzweil[18] 提出了一类常微分方程的推广形式, 并且考虑了这类方程包括连续依赖性在内的一些性质 (参阅 [18], [19]). 关于 Kurzweil 方程的研究以及与本文主题的关系, 在 [4] 中有详细的讨论. [4] 的紧性结果是, 如果定理 10.1 的 (iii) 减弱为

(iii) L_1- 函数类 $m_s(\tau):[0,1]\to R$ 具有性质 $M_s(t)=\int_0^t m_s(\tau)d\tau$ 等度连续,

则每个极限方程都是 Kurzweil 方程 (但不必是常微分方程).

另一个分类方面的结果是, 如果 (*) 的极限方程唯一, 则极限方程必为自治常微分方程 (参阅 [5, 定理 9.1 及注 9.2]). 此结果必须有假设 (A) 才能保证, 否则不成立.

13. 关于非常微极限方程的不变性质与不变性原理

我们在第十一节曾提到要给出非常微极限方程的 ω- 极限集的不变性质. 现在不打算这样做是因为: 所有从定理 7.1 到 7.6 的关于极限方程的结果, 对于常可积型极限方程亦成立, 其证明也相同.

我们想要重新考查例 7.7 和 7.8. 其方程具有形式

$$\begin{aligned}\dot{x}&=f_1(x,y,s),\\ \dot{y}&=f_2(x,y,s)+f_3(x,y).\end{aligned}\tag{13.1}$$

$(x,y)\in R^n\times R^m$. 假设 $x\neq 0$ 时, $f_3(x,y)\neq 0$.

当常可积型算子方程作为极限方程时, 例 7.7 和 7.8 的结论仍然成立. 这就是明显地减弱了关于 f 的条件: 例 7.8 中极限方程的存在性及例 7.7 的正准紧性都更容易满足.

为说明以上的结论, 我们注意, 利用极限方程是为了证明 $E=\{(x,y):y=0\}$ 中的唯一不变集为原点 $\{0\}$. 现在, 容易看出, 如果 H 为 (13.1) 的极限算子, 而 $(u(s),0)$ 为一函数, 则 $H_a(u,0)$ 的 y 坐标为 $\int_a^r f_3(u(s),0)ds$.

这是定义 12.4 中收敛的直接结论. 关于 f_3 的假设蕴含了 E 的不变子集必为 $\{0\}$.

注意: 我们不必计算极限可积型算子, 其存在性与方程的结构就可以给出结果.

14. 广义的正准紧性

回忆一下

$$\dot{x} = f(x, s), \tag{*}$$

为正准紧, 如果对每个序列 $t_k \to \infty$, f^{t_k} 的一个子列收敛. 如果考虑广义的极限方程类, 我们显然可以减弱准紧性的条件 (参考, 定理 10.1).

定理 14.1 假如对每个固定的 s 和一个给定的紧集 $K \subset R^n$, 函数 $f(\bullet, s)$ 满足

$$|f(x,s) - f(y,s)| \le v_K(|x-y|, s),$$

其中 $v_K(\bullet, s)$ 单调不减, 在 0 连续, 且 $v_K(0,s) = 0$. 又假设模数 $v_K(r,s)$ 关于 s 局部可积, 且

$$\int_s^{s+1} v_K(r,\tau)d\tau \le N_K(r)$$

关于每个 s 成立. 当 $r \to 0$ 时, $N_K(r) \to 0$. 则 (*) 正准紧.

证明由 [5, 第八节] 给出. 这里仍然有很多可能的推广.

15. 关于收敛性

我们将讨论正在采用的收敛性并且对第四节中提出的问题给出答案.

知道收敛由一个度量或一个拓扑生成是有用的. 可以使我们利用点集拓扑中的概念. 不幸的是, $\mathcal{G}$ 上没有定义收敛的度量或拓扑. 我们将介绍文 [1, 附录 B] 中方法的梗概.

对 $m = 1, 2, ...$, 设 $h_m(t)$ 为 R 到 $[0,1]$ 的分段线性函数, 每一分段联结 $R \times [0,1]$ 中的点 $(2k/m, 0)$ 和 $((2k+1)/m, 1)$. 对 $n, m = 1, 2, ...$, 记 $\phi_{n,m}$ 为

函数 $\phi_{n,m}(s)=\frac{1}{n}h_m(s)$．设 $g_{n,m}(x,s)$ 在 $R\times R$ 上定义为：$g_{n,m}(x,s)=1$，当 $x=\phi_{n,m}(s)$; $g_{n,m}(x,s)=\frac{1}{m}$，当 $|x-\phi_{n,m}(s)|\geq\frac{1}{m}$，$g_{n,m}$ 为映入 $[0,1]$ 中的连续延拓．正如 [1, 附录 B] 一样，可以证明 $g_n\equiv\frac{1}{n}$ 为 $g_{n,m}$ 当 $m\to\infty$ 时的极限．所以 g_n 属于 $\{g_{n,m}:n,m=1,2,...\}$ 的闭包．而 $g\equiv 0$ 不属于此闭包，虽然它属于此闭包的闭包．

我们再进行一些讨论．这里的拓扑其收敛序列与 $\mathcal{G}$ 中的收敛序列一致．这个拓扑为紧开拓扑，$\mathcal{G}$ 中的元素，如第十二节中的一样，为从 $C[a,b]$ 到 $C[a,b]$ 的算子．所以，相对于紧开拓扑的序列连续性，即相对于 $\mathcal{G}$ 中收敛的连续性．

另外一种考虑就是找出 $\mathcal{G}$ 的一个子类，其上的收敛由一种度量给出．这方面可做的有很多．部分的答案由 [3], [4] 间接给出．例如，满足定理 10.1 条件 (i)-(iv) 的函数 (对于同样的 M_A 和 K_A)$\mathcal{G}$ 中 g_k 收敛到 g_0 等价于

$$\int_a^b g_k(x,s)ds\to\int_a^b g_0(x,s)ds \tag{15.1}$$

对每个区间 $[a,b]$ 和每个向量 $x\in R^n$ 成立．(15.1) 中给出的收敛则是按度量给出的 (参阅 [3] 及 [41])．

至于第二个问题，公式 (15.1) 对一个 $\mathcal{G}$ 的特殊的子类给出了更好的表达式．

文献中也提到过几种类型的收敛用于与我们的研究相类似的问题．Miller[27] 和 Sell[36,39] 曾经利用 $g_k(x,s)$ 到 $g_0(x,s)$ 在紧区间上的一致收敛来构造极限方程．Strauss 和 Yorke[40] 以及 Miller 和 Sell[29,30] 在积分方程的讨论中又利用了积分型的判据，其后 Neustadt 在 [32] 中又有推广．Rouche[35] 通过类似于 L_1 收敛的积分收敛也研究过极限方程．我们需要一种相对于弱 L_1 收敛的连续性．(15.1) 的特殊形式适用于等度连续，已经在 Gikhman[12] 讨论连续依赖性时出现过，其后一些学者进行了推广．

最后一个问题是：　收敛性能否减弱？当然，我们希望保持结论不变．我们的答案取决于找出解对初值以及方程右端的连续依赖性的必要性条件 (参阅第六节)．笔者在这方面做过一些工作．简单地说，定义 4.2 中的

收敛关于其连续依赖性并非是必要的. 但如果我们要求

$$x(t) = z(t) + \int_0^t g(x(s), s)ds$$

的解连续依赖于 g 以及连续函数 $z(t)$, 则它就成为必要的了. 所以, 只要对于连续依赖的内容加强一些, 则我们的收敛性就成为了必要条件 (参阅 [1],[2] 及 [5, 第五节]).

16. 关于文献的注记及相关课题

本文主要讨论极限方程及其与不变性质和稳定性的关系. 极限方程在各种有趣的领域中成为了一个工具. 一个特殊和重要的领域就是将经典拓扑动力学应用于非自治微分方程和积分方程的研究. 我们不是与 Sell 的专著 [37], Sell 的综述 [38] 以及 Miller 和 Sell[31] 的最新研究一争高下.

渐近自治系统的特殊情形 Markus[26] 已经研究过了, 其实质与本文中的是一样的, 即通过极限方程的性质推导原方程的性质. 非渐近自治方程的极限分析由 Miller 给出. 例如, 关于几乎周期系统 [27,28]. Sell[36] 给出了平移技巧的基础及其与经典拓扑动力学的关系. Miller 和 Sell [30] 将此推广到 Volterra 积分方程. 常微没有唯一性的一种特殊情形曾由 Sell[39] 研究过.

不变性原理以及对于稳定性的重要性由 LaSalle[20-23] 发现. 除了 [21] (讨论周期方程) 以外, 都是处理自治问题. 相关的工作及应用可以在 Onuchic[33] 和 Peng[34] 中找到. 关于一般非自治系统的解流或动力系统的不变性由 Darformos[9,10] 给出, 而 [11] 的工作与 Sell[36] 关于动力系统的相关. 第七节中的不变性原理是由 Wakeman 在 [41] 中建立的. 同时, 可参阅 Rouche 的文章 [35] 以及 LaSalle 的综述 [24]. [3] 中的条件更弱一些. 非常微的极限方程由 [4] 和 [5] 引人.

致谢: 我向 LaSalle 教授表示我的谢意, 感谢他对我进行此项研究以及写作此文所给予的指导和鼓励.

参考文献

[1] Z.Artstein, *Continuous dependence of solutions of Volterra integral equations*, SIAM J. Math. Anal.,6(1975), pp.446-456.

[2] Z.Artstein, *Continuous dependence of fixed points of condensing maps, Dynamical Systems.* An International Symposium. Academic press, New York, 1976.

[3] Z.Artstein, *Topological dynamics of an ordinary differential equation*, J.Diff. Eqs., to appear.

[4] Z.Artstein, *Topological dynamics of ordinary differential equations and Kurzweil equations*, Ibid., to appear.

[5] Z.Artstein, *The limiting equations of nonautonomous ordinary differential equations*, to appear.

[6] Z.Artstein, *Limiting equations and Liapunov functions*, forthcoming.

[7] Z.Artstein & E.F.Infante, *On the asymptotic stability of oscillators with unbounded damping*, Quar. Appl. Math., to appear.

[8] T.A. Burton, *An extension of Liapunov's second method*, J.Math. Anal. Appl., 28(1969),pp.545-552;a correction; Ibid, 32(1970), pp. 689-691.

[9] C.M. Dafermos, *An invariance principle for compact processes*, J.Diff. Eqs., 9(1971), pp. 239-252.

[10] C.M. Dafermos, *Uniform processes and semicontinuous Liapunov functionals*, Ibid., 11(1972),pp.401-415.

[11] C.M. Dafermos, *Semiflows associated with compact and uniform processes*, Math. Systems Theory, 8(1974),pp.599-603.

[12] I.I. Gikhman, *On a theorem of N.N.Bogolyubov*, Ukrain. Math. J., 4(2) (1952), pp. 215-218.

[13] J.R.Haddock, *On Liapunov functions for nonautonomous systems*, J.Math. Anal. Appl., 47 (1974), pp. 599-603.

[14] J.R.Haddock, *Stability theory for nonautonomous systems*, Dynamical Systems. An International Symposium. Academic Press, New York, 1976.

[15] J.K. Hale, *Ordinary Differential Equations*, Johm Wiley, New York, 1969.

[16] P.Hartman, *Ordinary Differential Equations*, Johm Wiley, New York, 1964.

[17] C.Kuratowski, *Topology I*, Academic Press, New York, 1966.

[18] J.Kurzweil, *Generalized ordinary differential equations and continuous dependence on a parameter*, Gzech. Mat. J., 7(82)(1957),pp. 418-449; and addition; Ibid., 9(84)(1959),pp. 564-573.

[19] J.Kurzweil, *Problems which lead to a generalization of the concept of an ordinary differential equation*, Differential Equations and Their Applications, Proc. Conference Prague, September 1962, Academic Press, 1963, pp. 65-76.

[20] J. P. LaSalle, *The extent of asymptotic stability*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A, 46(1960),pp. 363-365.

[21] J. P. LaSalle, *Asymptotic stability criteria*, Proc. Symp. Appl. Math. Hydrodynamic Instability, vol.13, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1962, pp. 299-307.

[22] J. P. LaSalle, *An invariance principle in the theory of stability*, Differential Equations and Dynamical Systems, Proc. Interna. Symp., Puerto,

Rico, Academic Press, New York, 1967, pp. 277-286.

[23] J. P. LaSalle, *Stability theory for ordinary differential equations*, J. Diff. Eqs., 4(1968), pp. 57-65.

[24] J. P. LaSalle, *Stability theory and invariance principles*, Dynamical Systems. An International Sym-posium. Academic press. New York, 1976.

[25] J. J. Levin, *On the global asymptotic behavior of nonlinear systems of differential equations*, Arch. Rational Mech. Anal., 6(1960), pp. 65-74

[26] L. Markus, *Asymptotically autonomous differential differential systems, Contribution to Nonlinear Oscillations*, vol. Ill, S. Lefschetz, ed., Princeton University Press, Princeton, N. J., 1956, PP. 17-29.

[27] R. K. Miller, *Almost periodic differential equations as dynamical systems with applications to the existence of a. p. solutions*, J. Diff. Eqs., 1(1965), pp. 337-345.

[28] R. K. Miller, *Asymptotic behavior of nonlinear differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc.115(1965), pp. 400-416.

[29] R. K. Miller & G. R. Sell, *Existence, uniqueness and continuity of solutions of integral equations*, Ann. Mat. Pura. Appl., (1968), pp. 135-152; 87(1970),pp. 281-286.

[30] R. K. Miller, *Volterra integral equations and topological dynamics*, Men. Amer. Math. Soc., no. 102, 1970.

[31] R. K. Miller, *Topological dynamics and its relation to integral equations and nonautonomous systems*, Dynamical Systems. Academic Press, New York, 1976.

[32]L. W. Neustadt, *On the solutions of certain integral like operator equations. Existence, uniqueness and dependence theorems*, Arch. Rational

Mech. Anal., 38(1970),pp. 131-160.

[33] N. Onuchic, *Invariance properties in the of ordinary differential equations with applications to stability problems*, Siam J. Control, 10(1972), pp. 67-690.

[34] T. K. C. Peng, *Invariance and stability for bounded uncertain systems*, Siam J. Control, 10 (1972), pp. 679-690.

[35] N. Rouche, *The invariance principle applied to non-compact limit sets*, Boll. Un. Mat. Ital., to appear.

[36] G. R. Sell, *Nonautonomous differential equations and topological dynamics. I, II*, Trans. Amer. Maht. Soc., 127(1967),pp. 241-283.

[37] G. R. Sell, *Lectures on Topological Dynamics and Differential Equations*, Van Nostrand-Reinhold, London, 1971.

[38] G. R. Sell, *Topological dynamics techniques for differential and integral equations*, Ordinary Differential Equations, Proc. 1971NRL-MRC Conf., L. Weiss, ed., Academic Press, New York, 1972, pp. 287-304.

[39] G. R. Sell, *Differential equations without uniqueness and classical topological dynamics*, J. Diff. Eps., 14(1973), pp. 42-56.

[40] A. Strauss & J. A. Yorke. *On asymptotically autonomous differential equations*, Math. Systems Theory, 1(1967), pp. 175-182.

[41] D. R. Wakeman. *An application of topological dynamics to obtain a new invariance property for nonautonomous ordinary differential equations*, J. Diff. Eqs. 17(1975), pp. 259-295.

[42] T. Yoshizawa, *Asymptotic behavior of solutions of a system of differential equations*, Contrib. Diff. Eps. I(1963),PP.371-388.

[43] T. Yoshizawa, *Stability Theory by Liapunov's Second Method*, publication no. 9, Math. Soc. of Japan, Tokyo, 1966.

[General Information]
书名=动力系统的稳定性
作者=陈兰荪主编
页数=98
SS号=11413776
DX号=
出版日期=2002年07月第1版
出版社=四川科学技术出版社